Fiche technique

Professeur : Mouad Zillou	Matière : Mathématiques

	Durée : 7 heures	Niveau : TCSF
Les capacités attendues	• Utiliser le cercle trigonométrique pour représenter et déterminer graphiquement les solutions des équations et d'inéquations trigonométriques • Tracer les courbes représentatives des fonctions sin et cos et les exploiter pour l'assimilation des notions de périodicité et de parité	

Contenus du programme	• **Les équations trigonométriques :**
	  • Equation de type cos(x)=a.
	  • Equation de type sin(x)=a.
	  • Equation de type tan(x)=a.
	• **Inéquation trigonométrique :**
	  • Inéquation de type sin(x)>a ou sin(x)<a.
	  • Inéquation de type cos(x)>a ou cos(x)<a.
	  • Inéquation de type tan(x)>a ou tan(x)<a.
	• **Les angles inscrits, les quadrilatères inscriptibles.**
	• **Représentation graphique de fonction sin et cos.**	

Recommandations pédagogique	• La résolution des équations et des inéquations trigonométrique serra une occasion pour approfondir les acquis concernant le cercle trigonométrique. • L'étude des angles inscrit et les quadrilatères inscriptibles et démontrer quelque relation dans le triangle	
Fichiers utilisés dans la préparation du cours	• Les orientations pédagogiques.+ Livre d'élève + Des sites électroniques. Distribution périodique du programme de mathématiques	
Rôle de l'enseignant	Ecrire l'activité au tableau + Marquer les difficultés + Répartir les tâches + Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle + Diagonaliser les prérequis des apprenants + Noter les observations	
Rôle de l'apprenant	Ecrire les activités + Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions et formuler les résultats de l'activité sous forme d'un théorème/propriété et répondre aux exercices	

Outils didactiques : Tableau, livre ,craie, compas , rapporteur …

I. Equations et inéquations trigonométriques

1. Equations trigonométriques

Propriété :

a. Equation de forme (1) $\cos(x)=a$	b. Equation de forme (2) $\sin(x)=a$
Propriété Soit $a\in\mathbb{R}$ • Si $a\notin[-1,1]$ alors l'équation (1) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. • Si $a\in]-1,1[$ alors il existe un nombre réel α tel que $\cos(\alpha)=a$. Donc l'équation (1) devient $\cos(x)=\cos(\alpha)$. Alors $x=\alpha+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$ Ou $x=-\alpha+2k'\pi\ /\ k'\in\mathbb{Z}$ Donc l'ensemble des solutions de l'équation (1) est :	**Propriété** Soit $a\in\mathbb{R}$ • Si $a\notin[-1,1]$ alors l'équation (1) n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$. • Si $a\in]-1,1[$ alors il existe un nombre réel α tel que $\sin(\alpha)=a$. Donc l'équation (2) devient $\sin(x)=\sin(\alpha)$. Alors $x=\alpha+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$ Ou $x=\pi-\alpha+2k'\pi\ /\ k'\in\mathbb{Z}$ Donc l'ensemble des solutions de l'équation (2) est : $S_2=\{\alpha+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pi-\alpha+2k'\pi\ /\ k'\in\mathbb{Z}\}$

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : $1\otimes\cos(x)=\frac{1}{2}$ et $2\otimes\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Θ $1\otimes\cos(x)=\frac{1}{2}$

On a $\frac{1}{2}\in[-1;1]$ donc il existe un nombre réel α tel que $\cos(\alpha)=\frac{1}{2}$.

Or on a $\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ donc l'équation (1) devient $\cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Par conséquent $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}$ Ou $x=-\frac{\pi}{3}+2k'\pi\ /\ k'\in\mathbb{Z}$

D'où $S_1=\left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{\pi}{3}+2k'\pi\ /\ k'\in\mathbb{Z}\right\}$

Θ $2\otimes\sin(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

On a $\frac{\sqrt{3}}{2}\in[-1;1]$ donc il existe un nombre réel α tel que $\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Or on a $\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ donc l'équation (2) devient $\sin(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Par conséquent $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}$ Ou $x=\pi-\frac{\pi}{4}+2k'\pi=\frac{3\pi}{4}+2k'\pi \,/\, k'\in\mathbb{Z}$

D'où $S_2=\left\{x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\frac{3\pi}{4}+2k'\pi \,/\, k'\in\mathbb{Z}\right\}$

Cas particuliers :

Si $\begin{cases}\cos(x)=0\\ \cos(x)=1\\ \cos(x)=-1\end{cases}$ alors $\begin{cases}x=\frac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\\ x=2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\\ x=\pi+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$	Si $\begin{cases}\sin(x)=0\\ \sin(x)=1\\ \sin(x)=-1\end{cases}$ alors $\begin{cases}x=k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{-\pi}{2}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

Remarque

Pour résoudre une équation trigonométrique sur un intervalle donné ; on la résoudre sur $\mathbb{R}$ puis encadrer les solutions sur cet intervalle de telle sorte trouver les valeurs possibles de nombre relatif k

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans l'intervalle $]-\pi;\pi]$ les équations suivantes :

$$\cos(x)=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad \sin(x)=\frac{1}{2} \quad ; \quad \sqrt{2}\cos^2(x)-\cos(x)=0$$

a. ***Equations de forme*** $\tan(x)=a$

Propriété

Soit $a\in\mathbb{R}$; on considère l'équation suivante (3) $\tan(x)=a$

Il existe un nombre réel unique α tel que $\tan(\alpha)=a$. Alors l'équation (3) devient $\tan(x)=\tan(\alpha)$.

Par conséquent $x=\alpha+k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}$
donc l'ensemble des solutions est $S_3=\{\alpha+k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\}$

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante $\tan(x)=1$

On a $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ donc l'équation devient $\tan(x)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Par conséquent $x=\frac{\pi}{4}+k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}$; alors $S=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$

Résoudre dans I les équations suivantes :

1) $\tan(x)=\sqrt{3}$; $I=\mathbb{R}$
2) $3\tan^2(x)-1=0$; $I=\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$
3) $\tan\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\left]\frac{-\pi}{2};\pi\right]$

2. ***Inéquations trigonométriques***

Pour résoudre une équation trigonométrique de forme $\cos(x)\geq a$; $\cos(x)\leq a$; $\sin(x)\geq a$ ou $\sin(x)\leq a$ on suit les étapes suivantes :

- Résoudre l'équation $\cos(x)=a$ (respectivement $\sin(x)=a$)
- Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.
- Marquer sur les axes des abscisses (respectivement les axes des ordonnés) les valeurs satisfaisant l'inéquation puis on détermine sur le cercle trigonométrique les arcs correspondants.

De même pour les inéquations de tangente.

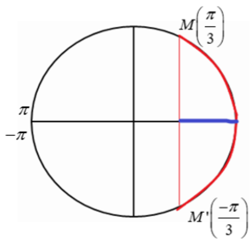
Exemples

- Résoudre dans $I=]-\pi;\pi]$ l'inéquation $\cos(x)>\frac{1}{2}$

On a $\cos(x)=\frac{1}{2}$ donc $\cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

Par conséquent $x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}$ Ou $x=-\frac{\pi}{3}+2k'\pi \,/\, k'\in\mathbb{Z}$

D'où $S_I=\left\{\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right\}$



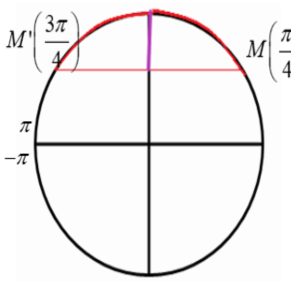
D'après le cercle trigonométrique on a $S_I=\left]\frac{-\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right[$

Pour l'inéquation $\cos(x)\leq\frac{1}{2}$ On a $S_I=\left]-\pi;\frac{-\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$

* Résoudre dans $I=]-\pi;\pi]$ l'inéquation $\sin(x)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ Donc $\sin(x)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

Par conséquent $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}$ Ou $x=\frac{3\pi}{4}+2k'\pi \,/\, k'\in\mathbb{Z}$



D'où $S_I=\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right\}$

D'après le cercle trigonométrique on a $S_I=\left[\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right]$

Pour l'inéquation $\sin(x)<\frac{\sqrt{2}}{2}$ On a $S_I=\left]-\pi;\frac{\pi}{4}\right[\cup\left]\frac{3\pi}{4};\pi\right]$

Résoudre dans I les inéquations suivantes :

- $\cos x>\frac{-\sqrt{2}}{2}$; $I=[0;2\pi]$
- $2\cos x-\sqrt{3}\geq 0$; $I=]-\pi;\pi]$
- $\sqrt{2}\sin x+1\leq 0$; $I=]-\pi;\pi]$; $(\sqrt{2}\sin x+1)(2\cos x-\sqrt{3})\geq 0$ $I=]-\pi;\pi]$

II. Angles inscrits et quadrilatères inscriptibles

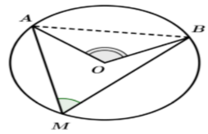
1. Angle inscrit – Angle au centre

Définition

Soient (C) un cercle de centre O , et [AB] une corde de (C) et $M\in(C)$.

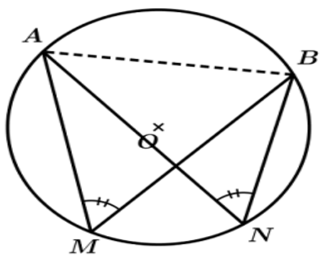
L'angle $\widehat{AMB}$ est appelé ***angle inscrit*** interceptant la corde [AB] sur (C).

L'angle $\widehat{AOB}$ est appelé ***angle au centre*** interceptant la corde [AB] sur (C).



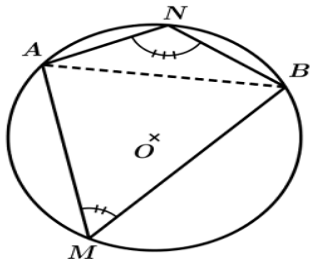
Propriété

Deux angles inscrit dans un cercle interceptant la même corde sont ***isométriques*** ou ***supplémentaires***.



$\widehat{AMB}=\widehat{ANB}$

Angles isométriques



$\widehat{AMB}+\widehat{ANB}=\pi$

Angles supplémentaires

2. Quadrilatères inscriptibles

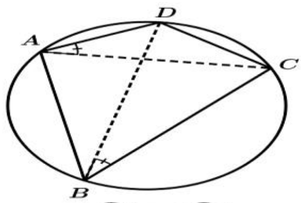
Définition

Un quadrilatère inscriptible est un quadrilatère dont les sommets se trouvent tours sur un seul et même cercle. Les sommets sont dits ***cocycliques***. Le cercle est dit ***circonscrit au quadrilatère.***

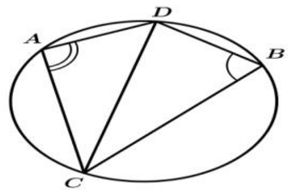
Propriété

Soient A, B et C trois points non alignés du plan et soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC et soit D un point du plan.

Le point D appartenant au cercle (C) si et seulement si $BAD + BCD = \pi$ ou $BAD = BCD$.



$\widehat{BAD} = \widehat{BCD}$



$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \pi$

III. Lois de sinus dans un triangle

1. Surface d'un triangle

Théorème

Soit ABC un triangle et S sa surface on a :

$$S = \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin\left(C\right) = \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin\left(B\right) = \frac{1}{2} AC \times AB \times \sin\left(A\right)$$

Soit ABC un triangle équilatéral tel que $AC = 4$

Calculer S la surface du triangle ABC .

1. Lois de sinus dans un triangle :

Théorème 01 :

Soit ABC un triangle et soit R le rayon de cercle circonscrit au triangle ABC.

On a $\frac{\sin\left(A\right)}{BC} = \frac{\sin\left(B\right)}{AC} = \frac{\sin\left(C\right)}{AB} = \frac{1}{2R}$

Théorème 02 :

Soient ABC un triangle et p son périmètre et r est le rayon de cercle inscrit au triangle ABC. On a : $S = \frac{1}{2} pr$