Etapes	Contenu	observ
Activité d'initiation	***I. Généralités*** ***Activité 1*** Soit f une fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ 1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f 2) Montrer que $(\forall x\in D_f);\ f(x)\leq 1$ 3) Montrer que $(\forall x\in D_f);\ f(x)\geq 0$ 4) Déduire que $(\forall x\in D_f);0\leq f(x)\leq 1$	
Résumer du cours	***1. Fonction majorée – fonction minorée – fonction bornée*** ***Définition*** Soit f une fonction définie un intervalle I $(I\subset\mathbb{R})$. On dit que : * f est ***majorée*** sur I s'il existe un nombre réel M tel que $(\forall x\in I);\ f(x)\leq M$ * f est ***minorée*** sur I s'il existe un nombre réel m tel que $(\forall x\in I);\ f(x)\geq m$ * f est ***bornée*** sur I s'elle est majorée et minorée sur I $((\forall x\in I);m\leq f(x)\leq M)$. ***Remarque :*** *Si f est majorée par M sur I alors (C_f) est au-dessous de la droite d'équation $y=M$ sur I . *Si f est minorée par m sur I alors (C_f) est au-dessus de la droite d'équation $y=m$ sur I **Exemple** Montrer que $f:x\mapsto\dfrac{1}{x^2+2}$ est majorée par $\dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$ On a $(\forall x\in\mathbb{R});x^2\geq 0\Rightarrow x^2+2\geq 2\Rightarrow\dfrac{1}{x^2+2}\leq\dfrac{1}{2}$ Donc $(\forall x\in\mathbb{R});\ f(x)\leq\dfrac{1}{2}$, par suite f est majorée par $\dfrac{1}{2}$ sur	**60 minutes**
Evaluation	**1)** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=1-\dfrac{1}{x}$ Montrer que f est majorée par 1 sur $\mathbb{R}_+^*$ **2)** Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+1}$ a) Déterminer D_g . b) Montrer que la fonction g est majorée par 1 et minorée par -3. c) Interpréter les résultats géométriquement.	
Résumé du cours	***Propriété*** : Soit f une fonction définie un intervalle I $(I\subset\mathbb{R})$. f est dite ***bornée*** sur I ; si $\exists k\in\mathbb{R}_+^*$ tel que $\lvert f(x)\rvert\leq k$	
Evaluation	Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\sin(x)+\cos(x)$. Montrer que $(\forall x\in\mathbb{R});\lvert f(x)\rvert\leq 3$	

Résumer du cours

2. ***Extremums d'une fonction numérique***

Définition

Soit f une fonction définie sur I et soit a un élément de I.

On dit $f(a)$ est une **valeur minimale** de f sur I si pour tout x de I on a $f(x) \geq f(a)$.

On dit $f(a)$ est une **valeur maximale** de f sur I si pour tout x de I on a $f(x) \geq f(a)$

Si $f(a)$ est une valeur maximale ou une valeur minimale de f sur I alors le point $A(a; f(a))$ est un **extremum** de f sur I.

Evaluation

Soit f une fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{4}{x}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f

2) Montrer que $f(2)$ est une valeur minimale de la fonction f sur $]0;+\infty[$.

3) Montrer que $f(-2)$ est une valeur maximale de la fonction f sur $]-\infty;0[$

Résumer du cours

3. ***Fonction périodique***

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition et soit T un nombre réel.

On dit que f est une fonction **périodique** et T sa période si et seulement si :

$$\forall x \in D_f \text{ on a } \begin{cases} (x+T) \in D_f \\ f(x+T) = f(x) \end{cases}$$

Exemple

$f : x \mapsto \cos(x)$ et $g : x \mapsto \sin(x)$ sont des fonctions périodiques et 2π leur période.

$h : x \mapsto \tan(x)$ est une fonction périodique et π sa période.

Remarque

Si f est une fonction périodique et T alors $(\forall x \in D_f), (\forall k \in \mathbb{Z})$ on a $f(x+kT) = f(x)$

Evaluation

Soient f, g et h trois fonctions numériques telles que $f(x) = \cos^2(x)$, $g(x) = \sin(2\pi x)$ et $h(x) = \tan(2x)$

Montrer que les fonctions f, g et h sont des fonctions périodiques et $\pi;1$ et $\dfrac{\pi}{2}$ sont respectivement leurs périodes.

Résumer du cours

4. ***Comparaison de deux fonctions***

Egalité de deux fonctions

Soient f et g deux fonctions numériques et D_f et D_g ses ensembles de définitions respectives.

On dit que f et g sont ***égales*** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- $D_f = D_g = D$
- $(\forall x \in D); f(x) = g(x)$

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur I .

On dit que f est inférieur ou égal à g si et seulement si $(\forall x \in I); f(x) \leq g(x)$ et on écrit $f \leq g$

Interprétation graphique

Si $f \leq g$ alors (C_f) est au-dessous de (C_g) sur I .

Si $f \geq g$ alors (C_f) est au-dessus de (C_g) sur I .

120 minutes

Si $f \leq 0$ alors (C_f) est au-dessous d'axe des abscisses sur I .

Si $f \geq 0$ alors (C_f) est au-dessus d'axe des abscisses sur I

Evaluation

1) Etudier l'égalité de f et g dans les cas suivants :

- $f(x)=\dfrac{x}{x^2}$ et $g(x)=\dfrac{1}{x}$
- $f(x)=\sqrt{(x+1)^2}$ et $g(x)=x+1$
- $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ et $g(x)=x-1$.

2) Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-2x+1$ et $g(x)=-2x^2+4x+1$

a- Comparer f et g pour tout x dans ces intervalles suivants $]-\infty;0]$; $]2;+\infty[$ et $[0;2]$

b- Déduire les positions relatives des courbes sur $]-\infty;0]$; $]2;+\infty[$ et $[0;2]$

Résumer du cours

5. *Image d'un intervalle par une fonction*

Définition

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I $(I \subset D_f)$.
L'ensemble des éléments $f(x)$, tel que $x \in I$, s'appelle l'image de l'intervalle I par la fonction f et se note $f(I)$ telle que $f(I)=\{f(x)/x \in I\}$.

Technique

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et soit $[a;b]$ un intervalle de I

Si f est croissante sur $[a;b]$ alors $f([a;b])=[f(a);f(b)]$.

Si f est décroissante sur $[a;b]$ alors $f([a;b])=[f(b);f(a)]$. Si f change la monotonie sur $[a;b]$ alors $f([a;b])=[V_{\min};V_{\max}]$ où $V_{\min}$ et $V_{\max}$ sont respectivement la valeur minimale et la valeur maximale de f sur I .

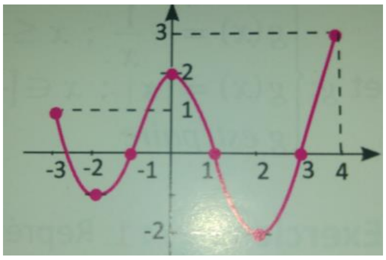
Evaluation

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $I=[-3;4]$ dont la courbe ci-dessous

1) Dresser le tableau de variations de f sur I

2) Déterminer les extremums de la fonction f , puis le nombre de solutions de l'équation $f(x)=1$

3) Déterminer graphiquement : $f([-2;0])$, $f([-3;-2])$, $f(]0;2[)$ et $f([3;4])$.



Résumer du cours

6. *Monotonie d'une fonction numérique*

a. *Définition*

Soit f une fonction définie sur I et soient a et b deux nombres réels dans I

Si $a<b$ et $f(a)<f(b)$ alors on dit que la fonction f est **strictement croissante** sur I

Si $a<b$ et $f(a)>f(b)$ alors on dit que la fonction f est **strictement décroissante** sur I.

Si $a<b$ et $f(a)=f(b)$ alors on dit que la fonction f est **constante** sur I.

b. *Monotonie et parité*

Propriété

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition symétrique par rapport à 0 et soit I un intervalle de $\mathbb{R}^+$ et J son symétrique par rapport à 0

Si f est paire :

Si f est croissante sur I alors f est décroissante sur J
Si f est décroissante sur I alors f est croissante sur J.

<u>Si f est impaire.</u>

La fonction f garde le même sens de variations sur I et sur J.

Soit f une fonction numérique définie par $f(x)=\frac{3}{x}+\frac{x}{3}$

1) Déterminer D_f
2) Etudier la parité de la fonction f
3) Montrer que pour tous a et b dans $]0;+\infty[$; on a $T=\frac{ab-9}{3ab}$.
4) Déduire le sens de variations de la fonction f sur $[3;+\infty[$ et $]0;3]$
5) Dresser le tableau de variations de f sur D_f en précisant sa valeur maximale et sa valeur minimale.
6) Soit f une fonction définie par :
   a) Compléter le tableau si f est **paire**.
   b) Compléter le tableau si f est **impaire**.

x	-4	-3	1	3	4
$f(x)$	5 ↘	-1 ↗	‖		

Activité d'initiation

II. Composée de deux fonctions

On considère les fonctions f et g telles que : $f(x)=\sqrt{x-2}$ et $g(x)=x-1$

1)
a) Calculer $g(5)$ puis déduire $f(g(5))$
b) Calculer $g(4)$ puis déduire $f(g(4))$
c) Peut-on calculer $f(g(1))$?

2) Déterminer un intervalle I tel que $(\forall x\in I); f(g(x))\in\mathbb{R}$, puis déduire l'expression de $f(g(x))$ pour tout $x\in I$

60 minutes

Résumer du cours

1. <u>Définition</u>

Soit f une fonction numérique définie sur I et soit g une fonction numérique définie sur J telle que $(\forall x\in I); f(x)\in J$.

La composée de la fonction f et g ,dans cet ordre, est la fonction qu'on note gof telle que $(\forall x\in I); gof(x)=g(f(x))$.

<u>Remarque</u>

- Ensemble de définition de gof est : $D_{gof}=\{x\in\mathbb{R}/x\in D_f \text{ et } f(x)\in D_g\}$
- $x\in D_{gof}\Leftrightarrow x\in D_f$ et $f(x)\in D_g$

Evaluation

Soient f *et* g les fonctions définies par $f(x)=x^2+1$ et $g(x)=\frac{3x}{x-1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions $f;g$; gof et fog .
2) Déterminer l'expression de $(gof)(x)$ pour tout $x\in D_{gof}$ et $(fog)(x)$ pour tout $x\in D_{fog}$.
3) Écrire sous forme d'une composée de deux fonctions dans les cas suivants :

$h:x\mapsto\frac{x^2}{x^2+8}$ **;** $h:x\mapsto\frac{\sqrt{x}-2}{2\sqrt{x}+3}$ **;** $h:x\mapsto\frac{x^2+1}{|x|+3}$

Résumer du cours

2. La monotonie de la composée de deux fonctions

Propriété

Soit f une fonction numérique définie sur I et soit g une fonction numérique définie sur J telle que $(\forall x \in I); f(x) \in J$.

- Si f et g ont même sens de variations alors la fonction gof est croissante sur I .
- Si f et g ont des sens de variations contraires alors la fonction gof est décroissante sur I

Evaluation

1) Soient f et g deux fonctions telles que $f(x) = x - 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$
Soit h une fonction numérique définie par $h = gof$
Etudier la monotonie de la fonction h sur

2) Soient u et w deux fonctions telles que $v(x) = x - 1$ et $w(x) = 2x^2 + 3x - 1$
Déterminer la fonction u telle que $w = uov$

3) On considère les fonctions suivantes $f(x) = x^2 - 2x - 1$ et $g(x) = \dfrac{x-2}{x+2}$

a) Déterminer D_f et D_g

b) Déterminer D_{gof} puis calculer $gof(x)$

c) Dresser le tableau de variations de gof

Résumer du cours

III. Représentation graphique des fonction $x \mapsto \sqrt{x+a}$ et $x \mapsto ax^3$

La représentation graphique de la fonction $x \mapsto ax^3 \ (a \neq 0)$

On considère f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^3 \ (a \neq 0)$ et (C_f) sa courbe dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

Parité de la fonction f

On a $(\forall x \in \mathbb{R})$; $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = a(-x)^3 = -ax^3 = -f(x)$ Donc f est une fonction impaire.

***Variations de f**

f est une fonction impaire, alors il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$

* **Si** $a > 0$

Soient x et y dans $\mathbb{R}^+$ tels que $x < y$

$x < y \Rightarrow x^3 < y^3 \Rightarrow ax^3 < ay^3 \Rightarrow f(x) < f(y)$ Donc f est croissante sur $\mathbb{R}^+$

f est une fonction impaire, alors f est croissante aussi sur $\mathbb{R}^-$

Par conséquent f est croissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variations	Représentation graphique
x : $-\infty$; 0 ; $+\infty$ — $f(x)$: $\nearrow$ 0 $\nearrow$	

Si $a < 0$

Soient x et y dans $\mathbb{R}^+$ tels que $x < y$

$x < y \Rightarrow x^3 < y^3 \Rightarrow ax^3 > ay^3 \Rightarrow f(x) > f(y)$

Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$

f est une fonction impaire , alors f est décroissante aussi sur $\mathbb{R}^-$. Par conséquent f est décroissante sur $\mathbb{R}$

Tableau de variations	**Représentation graphique**
	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	0	↘

2. *Représentation graphique de la fonction* $x \mapsto \sqrt{x+a}$

On considère f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x+a}$ et (C_f) sa courbe dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

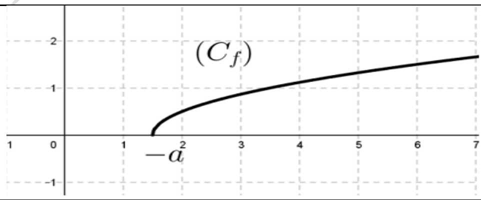
Domaine de définition $D_f = [-a;+\infty[$

Variations de f

Soient x et y dans D_f tels que $x<y$

$x<y \Rightarrow x+a<y+a \Rightarrow \sqrt{x+a}<\sqrt{y+a} \Rightarrow f(x)<f(y)$

Donc f est croissante sur $[-a;+\infty[$

Tableau de variations	**Représentation graphique**
	

x	$-a$	$+\infty$
$f(x)$	↗	

On peut construire la courbe de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x+a}$ à partir de la courbe d'une fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ en utilisant une translation de vecteur $-a\vec{i}$

Evaluation

Soient f et g deux fonctions définies par : $f(x)=2x^3$ et $g(x)=\sqrt{x+3}$ et (C_f) et (C_g) respectivement les courbes de f et g dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Vérifier que $f(1)=g(1)$, puis interpréter le résultat graphiquement.

2) Dresser le tableau de variations de f et g .

3) a-Construire les courbes dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

b- Résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

c- Déterminer graphiquement $f([3;+\infty[)$

4) a-Déterminer D_{fog} .

b- Étudier les variations de la fonction fog à partir des variations des fonctions f et g sur $[3;+\infty[$

c- Calculer $fog(x)$ pour tout D_{fog}