# *Fiche technique*

| Professeur : Mouad Zillou | Matière : Mathématiques |
|---|---|

## *Droite dans le plan*

| | Durée : 5 heures | Niveau : TCSF |
|---|---|---|
| **Les capacités attendues** | • Exprimer les notions et les propriétés de la géométrie vectorielle, à l'aide des coordonnées.<br>• Utiliser l'outil analytique dans la résolution de problèmes géométriques.<br>• Utiliser différentes méthodes pour exprimer la colinéarité de deux vecteurs. | |
| **Contenus du programme** | • Le repère- Les coordonnées d'un vecteur.<br>• Deux vecteurs colinéaires.<br>• Représentation paramétrique d'une droite.<br>• Équation cartésienne d'une droite | |
| **Recommandations pédagogiques** | • Il faudra habituer les élèves à utiliser différentes méthodes pour exprimer la colinéarité de deux vecteurs. | |
| **Fichiers utilisés dans la préparation du cours** | • Les orientations pédagogiques.+ Livre d'élève + Des sites électroniques. Distribution périodique du programme de mathématiques | |
| **Rôle de l'enseignant** | • Ecrire l'activité au tableau + Marquer les difficultés + Répartir les tâches + Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle + Diagonaliser les prérequis des apprenants + Noter les observations | |
| **Rôle de l'apprenant** | • Ecrire les activités + Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions et formuler les résultats de l'activité sous forme d'un théorème , propriété ……<br>• Répondre aux exercices | |

**Outils didactiques : Tableau, livre, craie, règle, calculatrice ……**

| Etapes | Contenu du cours | Durée |
|---|---|---|
| | **I. Repère du plan - Coordonnés d'un point - Coordonnées d'un vecteur**<br>**1. Repère du plan**<br>***Définition***<br>Soient $O, I$ et $J$ trois points distincts non alignés.<br>On pose $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$<br>*Le triplet $(O,\vec{i},\vec{j})$ définie un repère du plan.<br>*Le point $O$ s'appelle l'origine du repère.<br>*Le couple $(\vec{i},\vec{j})$ s'appelle base du plan.<br>*La droite $(OI)$ s'appelle l'axe des ***abscisses***.<br>*La droite $(OJ)$ s'appelle l'axe des ***ordonnés***.<br>*Si $(OI)\perp(OJ)$ alors le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthogonal.<br>*Si $(OI)\perp(OJ)$ et $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1u$ alors le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé | |
| | **2. Coordonnées d'un point - coordonnées d'un vecteur**<br>***Activité***<br>Dans un repère orthonormé du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère les points suivants :<br>$A(1;3)$ ; $B(-1;2)$ et $C(-2;-1)$.<br>1) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants : $\overrightarrow{AB}$ ; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$<br>2) Calculer les distances suivantes : $AB$, $AC$ et $BC$.<br>3) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivantes : $2\overrightarrow{AB}$ et $-3\overrightarrow{BC}$.<br>4) Déterminer les coordonnées des vecteurs suivantes $2\overrightarrow{AB}+(-3)\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.<br>5) Déterminer les coordonnées du point $I$ le milieu du segment $[AB]$ | |
| | **a. *Définitions et propriété***<br>Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.<br>✱ Soit $M$ un point du plan. Il existe un seul couple $(x,y)$ tel que $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$.<br>Le couple $(x,y)$ s'appelle couple de coordonnées du point $M$ tel que $x$ s'appelle abscisse du point $M$ et $y$ s'appelle ordonné du point $M$, et on écrit $M(x,y)$ ou $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.<br>✱ Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. Il existe un seul couple $(x,y)$ tel que $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$.<br>Le couple $(x,y)$ s'appelle couple de coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que $x$ s'appelle abscisse du vecteur $\vec{u}$ et $y$ s'appelle ordonné du point M, et on écrit $\vec{u}(x,y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ | |
| | ***b. Multiplication d'un vecteur par un scalaire***<br>Soit $\vec{u}(x,y)$ un vecteur du plan et soit $k$ un nombre réel. La multiplication du vecteur $\vec{u}$ par $k$ est le vecteur $k\vec{u}$ qui a pour coordonnées $k\vec{u}(kx,ky)$.<br>**c. *Coordonnées d'une somme de deux vecteurs*** | |

Soient $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs du plan. La somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteurs $\vec{u}+\vec{v}$ qui a pour coordonnées $\vec{u}+\vec{v}(x+x'+y+y')$

***Exemple :***

On a $\vec{u}(2;-3)$ et $\vec{v}(0;-1)$ donc $2\vec{u}(4;-6)$ et $\vec{u}+\vec{v}(2;-4)$

**b. *Propriété :***

Soient $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

* Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$
* Le milieu du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$
* Si le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé on a $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

***Exemple***

On considère les points $A(3;1)$ , $B(-1;2)$ et soit $I$ le milieu $[AB]$

- Les coordonnées : on a $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$ donc $\overrightarrow{AB}(-4;1)$
- Les coordonnées du point $I$ : on a $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(1;\frac{3}{2}\right)$
- La distance $AB$ : on a $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$ donc $AB=\sqrt{17}$

**c. *Egalité de deux vecteurs***

***Propriété***

Soient $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs du plan.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si $x=x'$ et $y=y'$. On écrit $\vec{u}=\vec{v}$

**Evaluation**

Soient $\vec{u}(3x+1;2)$ et $\vec{v}(4;y-3)$ deux vecteurs.

Déterminer $x$ et $y$ pour que $\vec{u}=\vec{v}$.

## II. Colinéarité de deux vecteurs

### 1. Déterminant de deux vecteurs

Soient $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs du plan.

Le nombre réel $xy'-x'y$ s'appelle le ***déterminant*** de vecteurs $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$, se note $\det(\vec{u},\vec{v})$ tel que $\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-x'y$

Exemple On considère les vecteurs suivants : $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}(3;4)$

- $\det(\vec{u},\vec{v})=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=2\times 4-3\times 3=-1$
- $\det(\vec{v},\vec{u})=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=3\times 3-2\times 4=1=-\det(\vec{u},\vec{v})$

- $\det(2\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 4\times 4 - 6\times 3 = -2 = 2\det(\vec{u},\vec{v})$.

***Remarque*** :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et $k$ un nombre réel on a :

- $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right) = -\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)$
- $\det\left(k\vec{u},\vec{v}\right) = \det\left(\vec{u},k\vec{v}\right) = k\times\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)$

## 2. Colinéarité de deux vecteurs

***Propriété*** :

Soient $\vec{u}(x,y)$ et $\vec{v}(x',y')$ deux vecteurs du plan.

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** si et seulement si $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0$

***Exemple***

On a $\vec{u}(2;3)$ et $\vec{v}\left(-1;\frac{-3}{2}\right)$ donc $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=2\times\left(\frac{-3}{2}\right)-3\times(-1)=-3+3=0$

Or on a $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0$ ; par conséquent $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

**Evaluation**

1) On considère les points suivants : $A(1;-8)$ , $B(11;7)$ , $C(5;-1)$ et $D(7;2)$

   Montrer que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
2) Etudier l'alignement des points $E, F$ et G dans les cas suivants :
   i) $E(-4;2)$ , $F(5;1)$ et $G(11;3)$
   ii) $E(-2;3)$ , $F(0;-1)$ et $G(-1;1)$.

# III. La droite dans le plan

## 1. Vecteur directeur d'une droite

***Définition***

Soit $(D)$ une droite qui passe par deux points distincts $A$ et $B$ .On appelle ***vecteur directeur*** de la droite $(D)$ tout vecteur qui est colinéaires au vecteur $\overrightarrow{AB}$

***Exemple***

Etant donné une droite $(D)$ d'équation réduite suivante : $(D): y=-x+1$

On remarque que la droite $(D)$ passe par les points $A(1;0)$ et $B(0;1)$ par conséquent le vecteur $\overrightarrow{AB}(-1;1)$ est un vecteur directeur de la droite $(D)$.

***Remarque***

Si une droite $(D)$ passe par un point $A$ et dirigée par un vecteur $\vec{u}$ alors on écrit $D\left(A,\vec{u}\right)$

## 2. Equation cartésienne d'une droite

***Activité*** :

Dans le plan on considère les points $A(3;1)$ , $B(-1;2)$ et soit $M(x,y)$ un point de $(AB)$

1) Que peut dire sur la colinéarité de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$
2) Déduire $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)$
3) Exprimer $\det\left(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{AB}\right)$ en fonction de $x$ et $y$ .

<table>
<tr><td></td><td>

***Définition*** :

Soient $a,b$ et $c$ des nombres réels où $(a,b)\neq(0,0)$

Toute droite du plan admet une équation de forme $ax+by+c=0$.

L'équation $ax+by+c=0$ s'appelle ***une équation cartésienne*** d'une droite.

***Propriété*** :

L'ensemble de point $M(x,y)$ du plan qui vérifient $ax+by+c=0$ est une droite dirigée par le vecteur $\vec{u}(-b,a)$.

***Remarque***

Soit $(D)$ une droite passe par un point $A(x_A;y_A)$ et dirigée par un vecteur $\vec{u}(-b,a)$ et $M(x,y)$ un point du plan.

$M\in D(A,\vec{u})\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\vec{u})=0$

***Exemple*** : On considère les points suivants $A(-3;1)$ et $B(-1;4)$

Déterminons l'équation cartésienne de la droite $(AB)$

$M\in D(A,\overrightarrow{AB})\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB})=0\Leftrightarrow 3(x+3)-2(y-1)=0\Leftrightarrow 3x-2y+11=0$

D'où $(AB):3x-2y+11=0$ est une équation cartésienne de droite $(AB)$.

</td><td></td></tr>
<tr><td>Evaluation</td><td>

Déterminer une équation cartésienne de la droite $D(A,\vec{u})$ telle que $A(-2;3)$ et $\vec{u}(-1;3)$

Déterminer une équation cartésienne de le droite $(BC)$ telle que : $B(-2;1)$ et $C(-3;2)$

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

**3. *Représentation paramétrique d'une droite :***

Soit $(D)$ une droite passe par $A(2;1)$ et dirigée par un vecteur $\vec{u}(3,-2)$ et $M(x,y)\in(D)$

1) Montrer qu'il existe un nombre réel $t$ tel que $\overrightarrow{AM}=t\vec{u}$
2) Déduire les coordonnées du point $M$ en fonction de $t$.

</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>

***Définition***

Soient $A(x_A;y_A)$ un point du plan et $\vec{u}(\alpha,\beta)$ un vecteur non nul.

Le système $\begin{cases}x=x_A+t\alpha\\ y=y_A+t\beta\end{cases}$ $/t\in\mathbb{R}$ s'appelle ***représentation paramétrique*** d'une droite passe par le point $A(x_A;y_A)$ et dirigée par un vecteur $\vec{u}(\alpha,\beta)$.

***Exemple*** : Soit $(D)$ une droite passe le point $A(2;-1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1;3)$ Le système $(D):\begin{cases}x=2-1t\\ y=-1+3t\end{cases}$ $/t\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de $(D)$.

***Remarque*** :

Toute droite du plan admet une infinité de représentation paramétrique.

</td><td></td></tr>
<tr><td>Evaluation</td><td>

Soient $A(3;-2)$ et $B(5;4)$ deux points du plan.

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(AB)$
2) Le point $C(4;-1)$ appartient-il à la droite $(AB)$.
3) Donner une équation cartésienne de la droite $(D):\begin{cases}x=-2+4t\\ y=-1+2t\end{cases}$ $/t\in\mathbb{R}$

</td><td></td></tr>
</table>

| | | |
|---|---|---|
| | **IV. Positions relatives de deux droites définies par ses équations cartésiennes.**<br>**Propriété**<br>Soient $(D)$ et $(D')$ deux droites du plan définies par ses équations cartésienne telles que $(D): ax+by+c=0$ et $(D'): a'x+b'y+c'=0$. On dit que $(D)$ et $(D')$ sont :<br>* ***Parallèles*** $((D)//(D'))$ si et seulement si $ab'-a'b=0$<br>* ***Sécantes*** si et seulement si $ab'-a'b\neq 0$ et en particulier $(D)$ et $(D')$ sont ***Orthogonales*** $((D)\perp(D'))$ si et seulement si $aa'+bb'=0$<br>**Exemple**<br>Soient $(D)$ et $(D')$ deux droites telles que : $(D): 3x-y-1=0$ et $(D'): -2x+\frac{2}{3}y+1=0$.<br>Etudions la position relative de $(D)$ et $(D')$<br>On a $3\times\frac{2}{3}-(-1)\times(-2)=2-2=0$ donc $(D)//(D')$. | |
| Evaluation | Etudier la position relative de $(D)$ et $(D')$ dans les cas suivants :<br>• $(D): 6x-2y+3=0$ ;; $(D'): 2x-\frac{1}{3}y-1=0$<br>• $(D): x+2y-3=0$ ;; $(D'): -x-2y+4=0$<br>• $(D): 5x-3y+2=0$ ;; $(D'): 2x-3y-5=0$<br>• $(D): -2x-y+2=0$ ;; $(D'): \frac{1}{2}x-y-7=0$ | |