Fiche technique

Professeur : Mouad ZILLOU	Matière : Mathématiques

	Durée : 15 heures	Niveau : TCSF
Les capacités attendues	• Identifier la variable et son ensemble de définitions pour une fonction définie par un tableau de données, une courbe ou une formule. • Lire l'image d'un nombre et déterminer-en le nombre de ses images grâce à la représentation graphique de la fonction. • Conclure les variations de fonction ou les valeurs maximales et minimales de la représentation graphique. • Utiliser la représentation graphique pour résoudre certaines équations et inéquations • Tracer la courbe d'une fonction polynôme ou fonction homographe dans un même repère. • Exprimer des situations dérivées de la réalité ou d'autres matériaux en utilisant le concept de fonction.	
Contenus du programme	• Généralités • Variations d'une fonction • Valeur maximale et valeur minimale d'une fonction sur un intervalle • Représentation graphique des fonctions : $x \mapsto ax^2$; $x \mapsto ax^2+bx+c$; $x \mapsto \frac{a}{x}$ $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$; $x \mapsto \cos(x)$; $x \mapsto \sin(x)$	
Recommandations pédagogiques	• Renforcer les acquis des élèves. • Approcher le concept de la fonction numérique et sa représentation graphique. • Résoudre divers problèmes tout en tenant compte des valeurs minimales et maximales d'une fonction. • Utiliser la calculatrice scientifique en identification d'image ou en calculatrice programmable pour créer des courbes. • Proposer des problèmes qui conduisent à des équations difficiles à résoudre géographiquement et d'identifier des solutions qui leur sont étroitement liées.	
Fichiers utilisés dans la préparation du cours		
Rôle de l'enseignant		
Rôle de l'apprenant		

Outils didactiques : Tableau, livre ,craie……

I. Fonction numérique d'une variable réelle

Activité :

On considère un rectangle de longueur $(x-1)cm$ et de largeur $(x-2)cm$ tel que x un réel supérieur strictement à 2.

On désigne par $f(x)$ la surface de ce rectangle

1. Déterminer l'expression de $f(x)$
2. Déterminer la surface du rectangle si $x=2$ et si $x=4$
3. Déterminer les valeurs possibles de x si $f(x)=8$ et si $f(x)=12$

Définition

Soit D une partie de

On appelle fonction numérique, qu'on note f toute relation qui a associée chaque nombre réel x de D par un seul nombre réel y qu'on note $f(x)$ et on écrit :

$$f: D \to IR$$
$$x \mapsto f(x)=y$$

- $f(x)=y$: S'appelle **l'image** de x par la fonction f
- Le nombre x s'appelle **antécédent** de y par la fonction

On considère une fonction numérique définie par $f(x)=3x^2-1$

Déterminer les images de 1 ; -2 et 3 par la fonction f

Déterminer les antécédents, s'ils existent, des nombres suivants 0, 5 et -4 par la fonction

II. Ensemble de définition d'une fonction numérique

Activité :

Soit f une fonction numérique définie par $f(x)=\dfrac{2x^2+1}{x^2-1}$

1) Déterminer les images de 0 ; 2 ;
2) Peut-on calculer les images de 1 et -1 par la fonction f ?

Définition

On appelle **ensemble de définition** d'une fonction numérique f, l'ensemble des nombres réels x pour lesquels l'image $f(x)$ est **bien définie** et se note souvent D_f

On écrit $D_f=\{x\in\mathbb{R} / f(x)\in\mathbb{R}\}$.

Remarque

* f est définie sur un I si et seulement si I est inclus dans D_f.

* Pour déterminer l'ensemble de définition d'une fonction f ; il faut éliminer tous les nombres réels pour lesquels le dénominateur est nul et ce qui sous le symbole de la racine carrée est négatif.

✱ ***Techniques :***

✱ Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux fonctions polynômes.

Fonction	*Ensemble de définition*
$x \mapsto P(x)$	$D = IR$
$x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$	$D = \{x \in IR \,/\, Q(x) \neq 0\}$
$x \mapsto \sqrt{P(x)}$	$D = \{x \in IR \,/\, P(x) \geq 0\}$
$x \mapsto \dfrac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$	$D = \{x \in IR \,/\, Q(x) \succ 0\}$
$x \mapsto \sqrt{\dfrac{P(x)}{Q(x)}}$	$D = \left\{x \in IR \,/\, \dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0 - et - Q(x) \neq 0\right\}$
$x \mapsto \dfrac{\sqrt{P(x)}}{\sqrt{Q(x)}}$	$D = \{x \in IR \,/\, P(x) \geq 0 et \; Q(x) \succ 0\}$

Exemple :

$f : x \mapsto 2x^2 + 3x + 1$ $D_f = \mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme

$g : x \mapsto \dfrac{3x-1}{2x+1}$ On a $D_g = \{x \in \mathbb{R} \,/\, 2x+1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$.

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$f_1 : x \mapsto x^2 + 3x - 5$	$f_2 : x \mapsto \dfrac{-2x+4}{3x+4}$	$f_3 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + x - 2}$
$f_4 : x \mapsto \dfrac{4x^2 - 5}{\sqrt{2x^2 + 2x - 4}}$	$f_5 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{2-x}}{\lvert x+2 \rvert - 3}$	$f_6 : x \mapsto \sqrt{\dfrac{2-x}{4x+2}}$
$f_7 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{4x+2}}$	$f_8 : x \mapsto \dfrac{\sin^2(x)}{\cos^2(x) - 1}$	

III. Egalité de deux fonctions numériques :

Définition :

Soient f et g deux fonctions numériques et D_f et D_g ses ensembles de définitions respectives.

On dit que f et g sont égales si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

✱ $D_f = D_g = D$

✱ Pour tout x de D on a $f(x) = g(x)$

Exemple :

On considère les fonctions suivantes : $f(x) = \sqrt{x^2}$ et $g(x) = \lvert x \rvert$

Etudions l'égalité de f et g

- On a $D_f = \mathbb{R}$ et $D_g = \mathbb{R}$ donc $D_f = D_g = \mathbb{R}$
- Pour tout x de D on a $f(x) = \sqrt{x^2} = \lvert x \rvert = g(x)$

Par conséquent $f = g$

Etudier l'égalité des fonctions suivantes :

* $f(x)=\frac{x}{x^2}$ et $g(x)=\frac{1}{x}$; * $f(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$ et $g(x)=x-1$

* $f(x)=\sqrt{(x+1)^2}$ et $g(x)=x+1$

IV. Représentation graphique d'une fonction

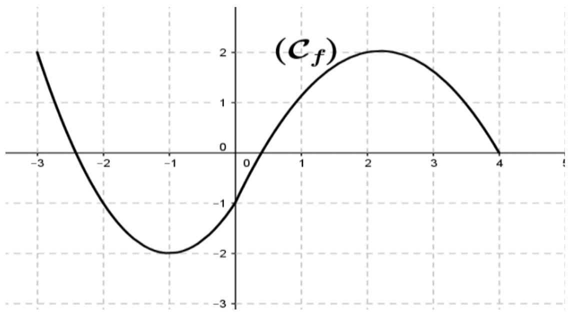
Définition

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$
Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.
On appelle **représentation graphique** ou une **courbe** de la fonction f , qu'on note (C_f) l'ensemble de points $M(x,y)$ du plan tel que $x \in D_f$ et $y=f(x)$.
L'équation $y=f(x)$ s'appelle équation de la courbe.

I) Soit f une fonction numérique définie par $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ et (C_f) sa courbe.

Parmi les points suivants déterminer ceux qui appartient à (C_f) en justifiant la réponse. $A(0;0)$; $B\left(1;\frac{1}{3}\right)$; $C(2;1)$ et $D\left(-1;\frac{-1}{2}\right)$

II) La figure ci-dessous montre la courbe d'une fonction f



1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f
2) Déterminer les images de -3 ;0 et 4
3) Déterminer les antécédents de 2 et -2
4) Déterminer les points d'intersection de la courbe avec les axes du repère.

Remarque

▪ Pour déterminer les points d'intersection de la courbe d'une fonction avec **l'axe des abscisses** on résoudre l'équation $f(x)=0$ sachant que $x \in D_f$.

▪ **Si** $0 \in D_f$; alors le point d'intersection de (C_f) avec **l'axe des ordonnés** est $A(0;f(0))$

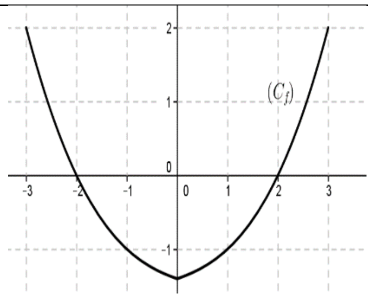
Soit f une fonction numérique définie par $f(x)=x^2+2x+3$ et (C_f) sa courbe.

Déterminer les points d'intersection de (C_f) avec les axes du repère.

I. Parité d'une fonction numérique

1) 1. Fonction paire

Soit une fonction f et sa courbe comme suit



1) Déterminer l'ensemble de définition
2) Compléter le tableau suivant :

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$						

3) Comparer $f(-1)$ et $f(1)$ puis $f(-3)$ et $f(3)$
4) Que peut-on déduire pour $f(-x)$ et $f(x)$ pour tout $x \in D_f$
5) Qu'elle la propriété géométrique vérifie par (C_f)

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.

On dit que f est une fonction **paire** si les deux conditions suivantes soient vérifiées :

* Pour tout $x \in D_f$ on a $-x \in D_f$
* Pour tout $x \in D_f$ on a $f(-x) = f(x)$

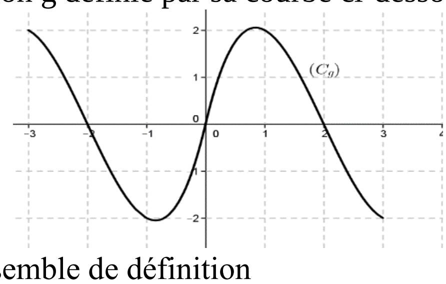
Propriété

La fonction est dite **paire** si et seulement si, sa **courbe** est **symétrique** par rapport à **l'axe des ordonnés**

2) Fonction impaire

Activité

On considère une fonction g définie par sa courbe ci-dessous



1) Déterminer D_g l'ensemble de définition
2) Comparer $g(-1)$ et $g(1)$ puis $g(-3)$ et $g(3)$
3) Que peut-on déduire pour $g(-x)$ et $g(x)$ pour tout $x \in D_g$
4) Qu'elle la propriété géométrique vérifie par (C_g)

Définition

Soit f une fonction numérique et D_f son ensemble de définition.. On dit que f est une fonction **impaire** si les deux conditions suivantes soient vérifiées :

Pour tout $x \in D_f$ on a $-x \in D_f$

Pour tout $x \in D_f$ on a $f(-x) = -f(x)$

Propriété

La fonction est dite **impaire** si et seulement si, sa **courbe** est **symétrique** par rapport à **l'origine du repère**.

Exemples

- Soit f une fonction définie par : $f(x)=x^2+1$; $D_f=\mathbb{R}$
  - Pour tout $x\in D_f$ on a $-x\in D_f$
  - Pour tout $x\in D_f$; $f(-x)=(-x)^2+1=x^2+1=f(x)$

Donc la fonction f est une fonction paire.

- Soit f une fonction définie par : $f(x)=2x$; $D_f=\mathbb{R}$
  - Pour tout $x\in D_f$ on a $-x\in D_f$
  - Pour tout $x\in D_f$; $f(-x)=2(-x)=-2x=-f(x)$; Donc la fonction f est une fonction impaire.

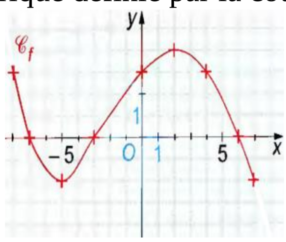
Application

Etudier la parité des fonctions suivantes :

$f_1:x\mapsto \lvert x\rvert-\dfrac{1}{x^2}$	$f_2:x\mapsto \dfrac{x}{x^2-1}$	$f_3:x\mapsto \lvert x-1\rvert-\lvert x+1\rvert$
$f_4:x\mapsto \sqrt{x}+1$	$f_5:x\mapsto x^2+x-3$	$f_6:x\mapsto \sin(x)-x\cos(x)$

V. Variations d'une fonction numérique

Soit f une fonction numérique définie par la courbe ci-dessous :



1) Déterminer D_f l'ensemble de définition
2) Comment se comporte $f(x)$ dans l'intervalle $[-7;-5]$.
3) Comment se comporte $f(x)$ dans l'intervalle $[-5;2]$.
4) Comment se comporte $f(x)$ dans l'intervalle $[2;6]$.
5) Compléter le tableau suivant

x	-7	-5
$f(x)$	3 ↘	-1

Ce tableau s'appelle tableau de variation de la fonction f

1. Propriété

Soit f une fonction définie sur I et soient a et b deux nombres réels dans ISi $a<b$ et $f(a)<f(b)$ alors on dit que la fonction f est **strictement croissante** sur I

- Si $a<b$ et $f(a)>f(b)$ alors on dit que la fonction f est **strictement décroissante** sur I.

	○ Si $a<b$ et $f(a)=f(b)$ alors on dit que la fonction f est **constante** sur I. ○ On dit que f est **strictement monotonie** sur I, si et seulement si, f est **strictement croissante** ou **strictement décroissante** sur I.	
	Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2+3$ 1) Etudier la parité de f pour tout x de $\mathbb{R}$. 2) Etudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}^+$. 3) Etudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}^-$. 4) Dresser le tableau de variation sur $\mathbb{R}$	
	2. *Taux de variation* ***Définition*** Soit f une fonction définie sur I. Soient a et b deux nombres réels **distincts** de I. Le nombre réel T tel que $T=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$ s'appelle **taux de variations** de la fonction f entre a et b. ***Propriété*** Soit f une fonction numérique définie sur I et T son taux de variations. ○ Si $T>0$ alors la fonction f est **strictement croissante** sur I. ○ Si $T<0$ alors la fonction f est **strictement décroissante** sur I. ○ Si $T=0$ alors la fonction f est **constante** sur I. ***Exemple*** Soit une fonction définie par $f(x)=2x+1$ Soient a et b deux nombres réels distincts de $\mathbb{R}$ On a $T=\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{2a+1-(2b+1)}{a-b}$ Donc $T=\dfrac{2a+1-2b-1}{a-b}=\dfrac{2(a-b)}{a-b}=2$ Or on a $2>0$ par conséquent $T>0$ Donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$	
	Soit f une fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2-4x+3$ 1) Montrer que le taux de variations f pour tous a et b distincts de $\mathbb{R}$ est $T=a+b-4$ 2) Etudier la monotonie de la fonction f sur chacun des intervalles suivants $]-\infty;2]$ et $[2;+\infty[$ 3) Dresser le tableau de variation sur $\mathbb{R}$.	
	3. *Monotonie et parité d'une fonction* ***Propriété*** Soit une fonction numérique et D_f son ensemble de définition symétrique par rapport à 0 et soit I un intervalle de $\mathbb{R}^+$ et J son symétrique par rapport à 0 ○ **Si f est paire :** ∗ Si f est croissante sur I alors f est décroissante sur J	

* Si f est décroissante sur I alors f est croissante sur J.

○ **<u>Si f est impaire.</u>**

La fonction f garde le même sens de variations sur I et sur J.

Le tableau présente les variations d'une fonction f

x	-6		-2		0		2		6
f	-1	↗	3	↘	‖				

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f .
2) Compléter le tableau si f est **paire**.
3) Compléter le tableau si f est **impaire**.

VI. Maximum et minimum d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur I et soit a un élément de I.

- On dit $f(a)$ est un **minimum** (une **valeur minimale**) de f sur I si pour tout x de I on a $f(x) \geq f(a)$.
- On dit $f(a)$ est un **maximum** (une **valeur maximale**) de f sur I si pour tout x de I on a $f(x) \geq f(a)$
- On dit que $f(a)$ est un **extremum** de f sur I si $f(a)$ est une valeur maximale ou une valeur minimale de f sur I.

Soit f une fonction définie par $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

1) Montrer que 2 est le minimum de f sur $\mathbb{R}_*^+$
2) Montrer que -2 est le maximum de f sur $\mathbb{R}_*^-$

VII. Résolution graphique des équations et des inéquations

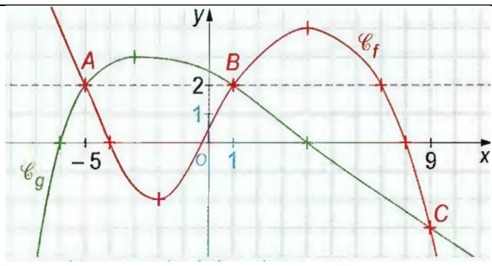
Propriété :

Soient f et g deux fonctions numériques et (C_f) et (C_g) ses courbes respectives dans un repère orthonormé et $a \in \mathbb{R}$.

- Les solutions de l'équation $f(x) = a$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite de l'équation $y = a$.
- L'ensemble de solutions de l'inéquation $f(x) \geq a$ (respectivement $f(x) \leq a$) est les intervalles (ou union des intervalles) dans lesquels (C_f) situe **au-dessus** (respectivement **au-dessous**) de la droite d'équation $y = a$.
- Les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses de points d'intersection de (C_f) et (C_g)

L'ensemble de solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ (respectivement $f(x) \leq g(x)$) est les intervalles (ou union des intervalles) dans lesquels (C_f) situe **au-dessus** (respectivement **au-dessous**) de (C_g) .

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ la figure suivante illustre ses courbes :



Résoudre graphiquement :

$g(x)=f(x)$	$g(x)=2$	$f(x)=4$	$f(x)=2$
$g(x)\geq f(x)$	$g(x)\geq 0$	$g(x)\prec 2$	$f(x)\geq 2$
	$g(x)\prec f(x)$		

I. Parabole et Hyperbole

1. Parabole :

Fonction $x \mapsto ax^2 \quad (a \neq 0)$

Activité

1) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x^2$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

a) Etudier la parité de la fonction f.

b) Déduire la propriété géométrique de (C_f)

c) Etudier la monotonie sur $\mathbb{R}^+$ puis déduire la monotonie sur $\mathbb{R}^-$.

d) Dresser le tableau de variation sur $\mathbb{R}$

e) Construire (C_f) la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.

1) Refaire les mêmes questions pour la fonction g qui est définie par $g(x)=-2x^2$

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.La courbe représentative de la fonction définie par $f: x \mapsto ax^2$ dans un repère orthonormé s'appelle une **parabole** de sommet l'origine du repère et l'axe des ordonnés son axe de symétrie.

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

Les variations de la fonction $f: x \mapsto ax^2$.

* Si $a>0$ alors la fonction est **croissante** sur $\mathbb{R}^+$ et **décroissante** sur $\mathbb{R}^-$
* Si $a<0$ alors la fonction est **croissante** sur $\mathbb{R}^-$ et **décroissante** sur $\mathbb{R}^+$
* Le tableau de variations de la fonction $f: x \mapsto ax^2$ est :

• **Si** $a \prec 0$

x	$-\infty$	0	$+$
$f(x)$	↗	**0**	↘

• **Si** $a \succ 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	**0**	↗

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

1) Dresser le tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

2) Donner la nature de (C_f) en précisant ses éléments caractéristiques.

3) Construire (C_f) .

a) *Fonction* $x \mapsto ax^2+bx+c \quad (a \neq 0)$

Définition

Soient a, b et c des nombres réels tels que $(a \neq 0)$.

La courbe représentative de la fonction définie par $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ dans un repère orthonormé est une parabole de sommet $\Omega\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ et la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$ son axe de symétrie.

Propriété :

Soient a, b et c des nombres réels tels que $(a \neq 0)$.

Les variations de la fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c$.

♠ Si $a > 0$ alors la fonction est **croissante** sur $\left[\frac{-b}{2a};+\infty\right[$ et **décroissante** sur $\left]-\infty;\frac{-b}{2a}\right]$

♠ Si $a < 0$ alors la fonction est **croissante** sur $\left]-\infty;\frac{-b}{2a}\right]$ et **décroissante** sur $\left[\frac{-b}{2a};+\infty\right[$

Le tableau de variations de la fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c$ est :

• **Si** $a \prec 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$f(-\frac{b}{2a})$	$\searrow$

• **Si** $a \succ 0$

x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$f(-\frac{b}{2a})$	$\nearrow$

1) Soit f une fonction définie par $f(x) = 2x^2+3x-4$.Déterminer la nature de (C_f) en Précisant ses éléments caractéristiques.
2) Étudier les variations de la fonction f puis dresser le tableau de variations dans les cas suivants : $f(x) = -2x^2+6x+1$ & $f(x) = 3x^2+4x+2$ & $f(x) = 2x^2+3$ & $f(x) = -3x^2+1$
3) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2-2x+2$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

a) Déterminer la nature de (C_f) en précisant ses éléments caractéristiques.

b) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ puis dresser le tableau de variations.

c) Construire (C_f)

4) Dans le repère précédent, construire la courbe de la fonction g qui est définie par $g(x) = x^2$. Que remarquez-vous ?

Remarque :

On peut construire la courbe de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$ à partir de la courbe d'une fonction $x \mapsto ax^2 \,'(a \neq 0)$ en utilisant une translation de vecteur $\vec{u}\left(\frac{-b}{2a}; f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$.

2. Hyperbole :

Fonction $x \mapsto \frac{a}{x} \quad (a \neq 0)$

Introduction **:**

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{a}{x}$ et $\left(C_f\right)$ sa courbe dans un repère orthonormé.

L'ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}^*$

Parité : $\left\{\begin{array}{l} \forall x \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow -x \in \mathbb{R}^* \\ \forall x \in \mathbb{R}^*; f(-x) = \frac{a}{-x} = -f(x) \end{array}\right\}$ donc la fonction est impaire donc sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Monotonie :

Soient x et y dans $\mathbb{R}^*$;

On a le taux de variations de f entre x et y est $T = \frac{-a}{xy}$

On a pour tous x et y de $\mathbb{R}^*$ on a $xy \succ 0$.

Donc le signe de T est le signe de $-a$

- Si $-a > 0$; c'est-à-dire $a < 0$; alors $T > 0$ par conséquent f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$.
- Si $-a < 0$; c'est-à-dire $a > 0$; alors $T < 0$ par conséquent f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

Tableau de variations **:**

Le tableau de variation de la fonction f est :

- **Si** $a \prec 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↗	‖	↗	

- **Si** $a \succ 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		↘	‖	↘	

La représentation graphique

La courbe de la fonction f s'appelle une **hyperbole** de centre O et d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$

A) On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{3}{x}$

1) Déterminer la nature de la courbe en précisant ses éléments.
2) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^*$
3) Dresser le tableau de variations.
4) Construire la courbe de la fonction f dans un repère orthonormé.

B) Refaire les mêmes questions à la fonction g définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{-2}{x}$

Fonction homographique : $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$; $(c \neq 0 \; et \; ad-cb \neq 0)$

Définition

Soient a,b,c et d des nombres réels $(c \neq 0)$.

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad-ab \neq 0$ et $c \neq 0$ alors toute fonction s'écrit sous forme

$x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$; s'appelle une fonction homographique.

Exemple :

$f(x) = \dfrac{2x-3}{3x+4}$ est une fonction homographique car $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8+9 = 17 \neq 0$ et

$3 \neq 0$

Remarque :

Si $ad-cb=0$ alors la fonction définie par $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est une fonction constante.

Forme réduite d'une fonction réduite :

Définition :

Soit f une fonction homographique.

Il existe trois nombre réels α ; β et k tels que $f(x) = \beta + \dfrac{k}{x+\alpha}$

L'écriture $f(x) = \beta + \dfrac{k}{x+\alpha}$ s'appelle forme réduite de la fonction f .

Exemple :

$f(x) = \dfrac{2x-5}{x+3} = \dfrac{2(x+3)-11}{x+3} = 2 - \dfrac{11}{x+3}$

Donc $\alpha = 3; \beta = 2; et\_k = -11$

Donner la forme réduite des fonctions suivantes :

$f(x) = \dfrac{-2x+3}{x-5}$; $g(x) = \dfrac{3x+4}{2x-5}$; $h(x) = \dfrac{-3x}{2x+4}$

Propriété :

Si f une fonction homographique alors $f(x) = \beta + \dfrac{k}{x+\alpha}$

Donc le tableau de variations de f est comme suit :

- **Si** $k \succ 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$

- **Si** $k \prec 0$

x	$-\infty$	$-\alpha$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

Exemple :

Dresser le tableau de variation de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x}{x-1}$

On $f(x) = \dfrac{2x}{x-1} = \dfrac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \dfrac{2}{x-1}$

Or $2 > 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R} - \{1\}$

Donc le tableau de variation de la fonction f est comme suit :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	$\|$	$\searrow$	

Propriété :

La courbe de la fonction de la forme $f(x) = \beta + \dfrac{k}{x+\alpha}$ est une **hyperbole** de centre $\Omega(-\alpha, \beta)$ et d'asymptotes $x = -\alpha$ et $y = \beta$.

<u>Remarque</u> :

On peut construire la courbe de la fonction $f : x \mapsto \beta + \dfrac{k}{x+\alpha}$ à partir de la courbe d'une fonction $x \mapsto \dfrac{k}{x}$ en utilisant une translation de vecteur $\vec{u}(-\alpha ; \beta)$.