Fiche technique

Professeur : Mouad Zillou	Matière : Mathématiques

L'ordre dans $\mathbb{R}$

	Durée : 7 heures	Niveau : TCSF
Les capacités attendues	• Maitriser les différentes techniques de comparaison de deux nombres (ou expressions) et utiliser la technique convenable selon la situation étudiée. • Représenter sur la droite numérique les différentes relations liées à l'ordre. • Reconnaitre et déterminer avec une précision donnée, une approximation d'un nombre (ou d'une expression). • Effectuer des majorations ou des minorations d'expressions algébriques. • Utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées d'un nombre réel.	
Contenus du programme	• Ordre et opérations. • Intervalles • La valeur absolue et ses propriétés. • Encadrement, approximation et approximations décimales	
Recommandations pédagogiques	• On devra développer et consolider l'habilité d'utilisation de l'ordre pour comparer des nombres et pour prouver certaines relations. • On devra entrainer les élèves à interpréter des relations de la forme $\lvert x-a \rvert \le r$ et à majorer des expressions en utilisant l'inégalité triangulaire et les propriétés de la valeur absolue. Les élèves seront amenés à utiliser ces techniques fondamentales de manière progressive. • La notion de la valeur absolue devra être liée à la distance de deux points sur la droite graduée. • Les propriétés de l'encadrement et de l'approximation d'une somme et d'une différence de deux nombres peuvent être présentées dans le cas général , mais l'encadrement et l'approximation d'un produit et d'un quotient, devront être étudiés à partir d'exemples numériques bien choisis pour montrer aux élèves les précautions à prendre et les conditions à respecter, pour faire des raisonnements corrects. • La calculatrice est un outil qui pourra aider dans l'approche des notions précédentes (approximation et encadrement…), on devra s'assurer que les élèves maitrisent l'écriture scientifique d'un nombre et qu'ils sont conscients des limites de l'usage de la calculatrice qui donne en général une valeur approchée décimale du résultat. On devra donc permettre aux élèves de s'approprier les techniques de la calculatrice scientifique.	
Fichiers utilisés lors de préparation	• Les orientations pédagogiques.+ Livre d'élève + Des sites électroniques. • Distribution périodique du programme de mathématiques	
Rôle de l'enseignant	Ecrire l'activité au tableau + Marquer les difficultés + Répartir les tâches + Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle + Diagonaliser les prérequis des apprenants + Noter les observations	
Rôle de l'apprenant	• Ecrire les activités + Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions. • Formuler les résultats de l'activité sous forme d'un théorème, une propriété… + Répondre aux exercices	

Outils didactiques : Tableau, livre ,craie……

Etapes	**Contenu du cours**	**observations**
Activité	***Ordre et opérations*** ***1. Ordre*** 1) Comparer $3\sqrt{3}$ et $1+3\sqrt{2}$ 2) Soit $x\in\mathbb{R}_+^*$ a) Montrer que $\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ b) Comparer $\dfrac{1}{2x}$ et $\sqrt{x^2+1}-x$.	**30 minutes**
Résumer du cours	***Définition*** Soient a et b deux nombres réels. • Si $a\le b$ alors $(a-b)\le 0$, on dit que $(a-b)\in\mathbb{R}^-$ • Si $a<b$ alors $(a-b)<0$, on dit que $(a-b)\in\mathbb{R}_-^*$ • Si $a\ge b$ alors $(a-b)\ge 0$, on dit que $(a-b)\in\mathbb{R}^+$ Si $a>b$ alors $(a-b)>0$, on dit que $(a-b)\in\mathbb{R}_+^*$	
Evaluation	1) Comparer a et b dans les cas suivants : i. $a=\sqrt{4n^2+1}$; $b=2n+1$ $n\in\mathbb{N}$ ii. $a=\dfrac{7x+2y}{7x}$; $b=\dfrac{8y}{7x+2y}$ $\left(x\in\mathbb{R}_+^*;y\in\mathbb{R}_+^*\right)$ 2) Soient x et y deux nombres réels tels que $x\le y\le 3$ i. Montrer que $x+y-6\le 0$ Comparer x^2-6x+1 et y^2-6y+1	**15 minutes**
	Propriétés : Soient a,b,c et d des nombres réels. ✱ Si $a\le b$ alors $a+c\le b+c$. ✱ Si $a\le b$ et $c\le d$ alors $a+c\le b+d$. ✱ Si $a\le b$ et $c>0$ alors $ac\le bc$. ✱ Si $a\le b$ et $c<0$ alors $ac\ge bc$. ✱ Si $0\le a\le b$ et $0\le c\le d$ alors $a\times c\le b\times d$. ✱ Si $0<a\le b$ alors $\sqrt{a}\le\sqrt{b}$ ✱ Si $0<a\le b$ alors $a^2\le b^2$. ✱ Si $a\le b<0$ alors $a^2\ge b^2$. ✱ Si a et b ont même signe et $a\le b$ alors on a $\dfrac{1}{a}\ge\dfrac{1}{b};(a\ne 0;b\ne 0)$. ***Exemples :*** • $a\le\dfrac{5}{7}$ *et* $b\le\dfrac{9}{7}$ *alors* $a+b\le 2$ • $-4\le -2$ *Alors* ''$(-12\le -6$ *car* $3>0)$; $(8\ge 4$ *car* $-2<0)$'' • $1<\dfrac{3}{2}$ *et* $\dfrac{1}{2}<2$ *alors* $1\times\dfrac{1}{2}<3$; $-5\le -\dfrac{1}{2}$ *Alors* $\dfrac{1}{-5}\ge -2$ • $\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{2}$ *Alors* $3>2$; $2\le\sqrt{5}$ *Alors* $2^2\le\sqrt{5}^2$ • $-4<-3$ *Alors* $(-4)^2>(-3)^2$	**20 minutes**

Résumer du cours

2. *Encadrement :*

Définition

Soient a , b et x deux nombres réels tels que $a < b$
Chaque double inégalité parmi, ces doubles inégalités suivantes $a \le x \le b$, $a < x \le b$, $a \le x < b$, $a < x < b$ est appelée ***encadrement*** de x d'amplitude $b - a$.

Exemple :

$3.13 \le \pi \le 3.14$ est un encadrement π de et d'amplitude $3.14 - 3.13 = 0.01$.

Propriété

Soien a, b, c , d , x et y des nombres réels.

* Si $a \le x \le b$ et $c \le y \le d$ alors $a + c \le x + y \le b + d$ et $a - d \le x - y \le b - c$
* a, b, c et d des nombres réels positifs ; Si $a \le x \le b$ et $c \le y \le d$ alors $a \times c \le x \times y \le b \times d$.
* a, b, c et d des nombres réels négatifs ; Si $a \le x \le b$ et $c \le y \le d$ alors $b \times d \le x \times y \le a \times c$.
* a et b des nombres réels positifs ; Si $a \le x \le b$ alors $a^2 \le x^2 \le b^2$.
* a et b des nombres réels négatifs ; Si $a \le x \le b$ alors $b^2 \le x^2 \le a^2$
* a, b, c et d des nombres réels ont même signe si alors $a \le x \le b$ et $c \le y \le d$ alors : $\frac{1}{b} \le \frac{1}{x} \le \frac{1}{a}$ et $\frac{1}{d} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{c}$.

20 minutes

Evaluatio n

On considère les nombres réels x, y et z tels que : $2 \le x \le 4$; $-3 \le y \le 1$; $-1,5 \le z \le -0,5$

Trouver un encadrement des nombres suivants : $x - y$; $x \times y$; $x^2 + y^2 + z^2$; $\frac{x+2}{z}$

15 minutes

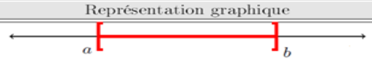
Résumer du cours

II. Les intervalles de $\mathbb{R}$

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$ On définit les différents intervalles de $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

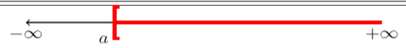
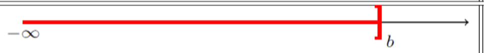
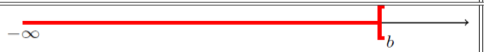
1. *Intervalles bornés*

Le tableau ci-dessous résume les quatre types d'intervalles bornés

Intervalle	Inégalité	Représentation graphique
$[a; b]$ intervalle fermé	$a \le x \le b$	
$]a; b[$ intervalle ouvert	$a < x < b$	
$[a; b[$ intervalle semi-ouvert (ouvert en b)	$a \le x < b$	
$]a; b]$ intervalle semi-ouvert (ouvert en a)	$a < x \le b$	

2. *Intervalles non bornés*

Le tableau ci-dessous résume les quatre types d'intervalles non bornés.

Intervalle	Inégalité	Représentation graphique
$[a; +\infty[$	$x \ge a$	
$]a; +\infty[$	$x > a$	
$]-\infty; b]$	$x \le b$	
$]-\infty; b[$	$x < b$	

Remarque :

- $+\infty$ (Plus l'infinie) et $-\infty$ (moins l'infinie) sont des symboles.
- Par convention le **crochet «] »** au voisinage de ∞ est ***toujours ouvert***.

120 minutes

- $\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$; $\mathbb{R}^{+}=[0;+\infty[$; $\mathbb{R}^{-}=]-\infty;0]$; $\mathbb{R}_{+}^{*}=]0;+\infty[$; $\mathbb{R}_{-}^{*}=]-\infty;0[$.
- L'ensemble vide ne contient aucun élément, il se note $\varnothing$.

Exemples

• $\{x\in\mathbb{R}/-3\leq x\leq 7\}$ Équivaut à $x\in[-3;7]$. • $\{x\in\mathbb{R}/2< x\leq 6\}$ Équivaut à $x\in]2;6]$	• $\{x\in\mathbb{R}/x\geq 2\}$ Équivaut à $x\in[2;+\infty[$. • $\{x\in\mathbb{R}/x>-2\}$ Équivaut à $x\in]-2;+\infty[$.

• $\{x\in\mathbb{R}/-4< x< 3\}$ Équivaut à $x\in]-4;3[$. • $\{x\in\mathbb{R}/-1\leq x< 4\}$ Équivaut à $x\in[-1;4[$	• $\{x\in\mathbb{R}/x<-5\}$ Équivaut à $x\in]-\infty;-5[$. • $\{x\in\mathbb{R}/x\leq -3\}$ Équivaut à $x\in]-\infty;-3]$

3. ***Intersection et réunion de deux intervalles :***

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$.
l'intersection des intervalles I et J est l'ensemble des nombres réels appartient à I **et** appartient J et se note $I\cap J$. ($\cap$ se lit **inter**).
La réunion des intervalles I et J est l'ensemble des nombres réels appartient à I **ou** appartient J et se note $I\cup J$. ($\cup$ se lit **union**).

Autrement dit :

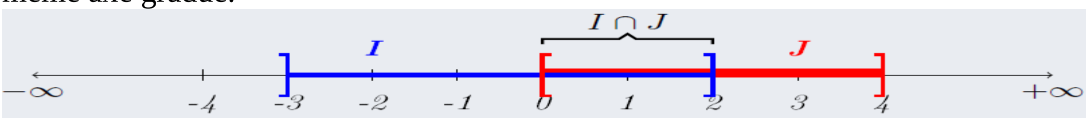
$$I\cap J=\{x\in\mathbb{R}/x\in I\_et\_x\in J\} .$$

$$I\cup J=\{x\in\mathbb{R}/x\in I\_ou\_x\in J\}.$$

Exemples :

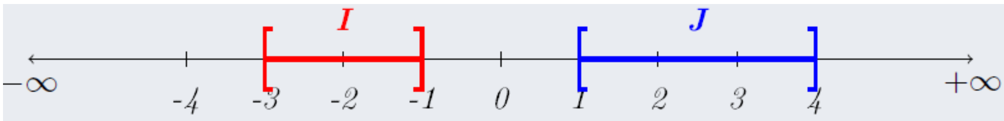
✱ Déterminons $I\cap J$ avec $I=]-3;2]$ et $J=[0;4]$.

Pour visualiser cette intersection, on peut représenter les intervalles I et J sur un même axe gradué.



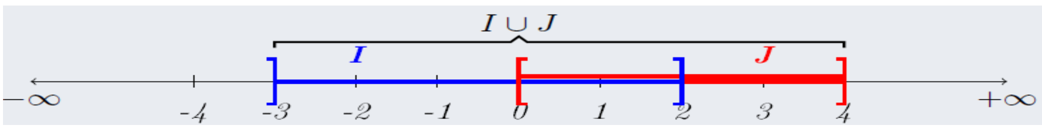
L'intersection des deux intervalles est la zone de l'axe gradué où les deux couleurs se superposent. Ainsi $I\cap J=[0;2]$.

✱ Déterminons $I\cap J$ avec $I=[-3;-1]$ et $J=[1;4]$.



$I\cap J=\varnothing$, car les ensembles I et J n'ont pas de zone en commun.

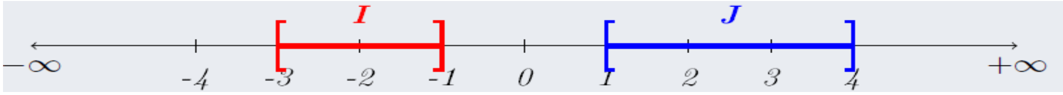
✱ Déterminons $I\cup J$ avec $I=]-3;2]$ et $J=[0;4]$.



Les nombres de la réunion sont les nombres qui appartiennent au moins à l'un des deux intervalles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué marquée soit par l'intervalle I soit par l'intervalle J . Ainsi $I\cup J=]-3;4]$.

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

* Déterminons $I\cup J$ avec $I=[-3;-1]$ et $J=[1;4]$.



$I\cup J=[-3;-1]\cup[1;4]$.

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Evaluation</td>
<td>

Déterminer l’intersection et la réunion de I et J dans les cas suivants :

<table>
<tr>
<td>

* $I=[-10;2]$ et $J=[-3;7]$
* $I=]-\infty;3]$ et $J=[-6;+\infty[$
* $I=[7;+\infty[$ et $J=[-5;+\infty[$

</td>
<td>

* $I=\left[-\frac{2}{3};\frac{3}{5}\right]$ et $J=\left[\frac{5}{7};1\right]$
* $I=\left]-\infty;-\frac{5}{4}\right]$ et $J=\left]-\frac{4}{3};+\infty\right[$

</td>
</tr>
</table>

</td>
<td>15 minutes</td>
</tr>
<tr>
<td>Résumer du cours</td>
<td>

Soit $I=[a;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $a<b$ on a :

- ✓ L’amplitude de I est le nombre réel A tel que $A=b-a$
- ✓ Centre de I est le nombre réel C tel que $C=\frac{a+b}{2}$
- ✓ Rayon de I est le nombre réel R tel que : $R=\frac{b-a}{2}$

Remarque

La définition précédente est valable pour les intervalles de forme $[a;b[$, $]a;b]$ et $]a;b[$

Exemple

On considère l’intervalle suivant : $I=[-1;3]$ on a :

- ✓ L’amplitude de I est $A=3-(-1)=4$.
- ✓ Le rayon de I est : $R=\frac{3-(-1)}{2}=2$.
- ✓ Le centre de I est : $C=\frac{3+(-1)}{2}=1$

</td>
<td>15 minutes</td>
</tr>
<tr>
<td>Activité</td>
<td>

III. Valeur absolue

1) Placer sur un axe gradué les points suivants : $A(-1), B(3), C(1)$ et $D(5)$

2) Calculer les distances suivantes : AB, AC, BC et AD.

</td>
<td>15 minutes</td>
</tr>
<tr>
<td>Résumer du cours</td>
<td>

Soit x un réel et M le point d'abscisse x de la droite des réels d'origine O .
La valeur absolue de x est la distance OM et se note $|x|$ telle que $|x|=OM$.

Remarque : Soit x un nombre réel on a

- ○ $|x|=x$ Si $x\geq 0$
- ○ $|x|=-x$ Si $x\leq 0$
- ○ $|x|\geq 0$ (Toujours positif)
- ○ $-|x|\leq x\leq |x|$
- ○ $|x^2|=|x|^2=x^2$

Exemple :

- ○ $|2-\sqrt{3}|=2-\sqrt{3}$ Car $2-\sqrt{3}$ est positif.
- ○ $|\sqrt{5}-3|=-(\sqrt{5}-3)=3-\sqrt{5}$, car $\sqrt{5}-3$ est négatif.
- ○ $|x-1|=x-1$ si $x\geq 1$ et $|x-1|=1-x$ si $x\leq 1$.

2. Distance entre deux réels.

Soient a et b deux nombres réels
A et B deux points de la droite graduée d'abscisses a et b respectivement.
La distance entre a et b est la valeur absolue de leur différence :
$AB=|a-b|=|b-a|$.

3. Propriété :

</td>
<td>60 minutes</td>
</tr>
</table>

	Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on a : $\lvert x\rvert=\lvert -x\rvert ; \lvert x-y\rvert=\lvert y-x\rvert ; \sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$; $\lvert x\times y\rvert=\lvert x\rvert\times\lvert y\rvert$; $\lvert x+y\rvert\le\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$; $\left\lvert\frac{x}{y}\right\rvert=\frac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert};(y\neq 0)$ $\lvert x\rvert=a$ Si et seulement si $x=a$ ou $x=-a$. (Avec $a\ge 0$) $\lvert x\rvert=\lvert y\rvert$ Si et seulement si $x=y$ ou $x=-y$. ***Exemples***: On prend $x=4$ et $y=-3$ On a $\lvert 4+(-3)\rvert=4-3=1$ et $\lvert 4\rvert+\lvert -3\rvert=4+3=7$ donc $\lvert 4+(-3)\rvert\le\lvert 4\rvert+\lvert -3\rvert$ On a $\lvert 4\times(-3)\rvert=\lvert -12\rvert=12$ et $\lvert 4\rvert\times\lvert -3\rvert=4\times 3=12$ donc $\lvert 4\times(-3)\rvert=\lvert 4\rvert\times\lvert -3\rvert$ On a $\left\lvert\frac{4}{-3}\right\rvert=\frac{4}{3}$ et $\frac{\lvert 4\rvert}{\lvert -3\rvert}=\frac{4}{3}$ donc $\left\lvert\frac{4}{-3}\right\rvert=\frac{\lvert 4\rvert}{\lvert -3\rvert}$	
Evaluation	Résoudre les équations suivantes : • $\lvert x-3\rvert=2$; $\lvert 2x-1\rvert=\lvert 3x+4\rvert$; $\lvert 4-3x\rvert=5$ • $\lvert x+4\rvert=1$; $\lvert x+5\rvert+\lvert -2x+1\rvert=0$; $\lvert x+3\rvert=-2$	**15 minutes**
Résumer du cours	**4. *Valeur absolue et intervalles*** ***Propriété*** : Soient $x\in\mathbb{R}$ et $r\in\mathbb{R}_+^*$. * $\lvert x\rvert\le r$ si et seulement si $-r\le x\le r$. (C.à.d. $x\in[-r;r]$). * $\lvert x\rvert\ge r$ si et seulement si $x\le -r$ ou $x\ge r$. (C.à.d. $x\in]-\infty;-r]\cup[r;+\infty[$). * $r_1\le\lvert x\rvert\le r_2$ si et seulement si $r_1\le x\le r_2$ ou $r_1\le -x\le r_2$. ***Exemples :*** On a $\lvert x-2\rvert\le\frac{3}{4}$ signifié que $-\frac{3}{4}\le x-2\le\frac{3}{4}$ Signifie que $-\frac{3}{4}+2\le x\le\frac{3}{4}+2$ Signifie que $\frac{5}{4}\le x\le\frac{11}{4}$ D'où $x\in\left[\frac{5}{4};\frac{11}{4}\right]$. On a $\lvert 2x-1\rvert>3$ signifié que $2x-1<-3$ ou $2x-1>3$ Signifie que $2x<-3+1$ ou $2x>3+1$ Signifie que $2x<-2$ ou $2x>4$ Signifie que $x<-1$ ou $x>2$ D'ou $x\in]-\infty;-1[\cup]2;+\infty[$.	**20 minutes**
Résumer du cours	***IV. Approximations – Approximations décimales*** ***1. Approximation par excès -- Approximation par défaut*** Soit x un réel tel que $a\le x\le b$ ou $a<x\le b$ ou $a\le x<b$ ou $a<x<b$. • Le réel a est appelé une ***valeur approchée par défaut*** de x à $b-a$ près. • Le réel b est appelé une ***valeur approchée par excès*** de x à $b-a$ près.	**30 minutes**

Exemple :

On a $1,732<\sqrt{3}<1.733$ donc $1,733$ est une approximation par excès de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} prés (A= $1,733-1,732=0.001=10^{-3}$) et $1,733$ est une approximation par défaut de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} prés.

2. *Valeur approchée*

Définition

Soient x,a et r trois réels, r est positif.
Si $|x-a|\leq r$ ou $|x-a|<r$, on dit que a est une ***valeur approchée*** de x à r près.

Exemple

On a $|\sqrt{2}-1,41|\leq 0,01$ donc $1,41$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à $0,01$ près.

Remarque

Si $a\leq x\leq b$ alors **:**

- ✓ $\dfrac{a+b}{2}$ est une valeur approchée de x à $\dfrac{b-a}{2}$ près.
- ✓ Tout nombre réel dans $[a;b]$ est une valeur approchée de x à $b-a$ près.

Exemple :

On a $2,236\leq\sqrt{5}\leq 2.237$

Donc $\dfrac{2,236+2.237}{2}=2.2365$ est une valeur approchée de $\sqrt{5}$ à $\dfrac{2,237-2,236}{2}=5\times 10^{-4}$ prés.

3. *Approximation décimale*

Définition

Soit x un nombre réel et N est un entier relatif alors il existe un entier naturel p tel que $N\times 10^{-p}\leq x\leq (\mathrm{N}+1)\times 10^{-p}$.
Le nombre décimal $N\times 10^{-p}$ est dit approximation décimale par défaut de x à 10^{-p}.

Le nombre décimal $(N+1)\times 10^{-p}$ est dit approximation décimale par excès de x à 10^{-p}.

Exemple :

On a $1,414\leq\sqrt{2}\leq 1,415$ signifié que $1414\times 10^{-3}\leq\sqrt{2}\leq 1415\times 10^{-3}$

C'est à dire $1414\times 10^{-3}\leq\sqrt{2}\leq(1414+1)\times 10^{-3}$.

d'où 1414×10^{-3} est une approximation décimale par défaut de $\sqrt{2}$ à 10^{-3} et $(1414+1)\times 10^{-3}$ est une approximation décimale par excès de $\sqrt{2}$ à 10^{-3}.