Durée	Activités	Contenu du cours	Evaluation et remarques
	Activité 01 1) Observer, puis compléter les listes suivantes par quatre nombres convenables $1;3;5;$............ $0;2;4;6$........ $0;1;4;9;16$............. • Chaque liste s'appelle une suite numérique. • Les nombres formant une suite sont appelés **les termes de la suite** • Dans la liste $0;2;4;6$........le nombre 0 s'appelle le **premier terme** de la suite ou le **terme initial**. 2) On prend la liste suivante $1;3;5;$........... Comment passe-t-on d'un terme au suivant ?	***I. Généralités sur les suites numériques*** Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et I une partie de $\mathbb{N}$ tel que $I = \{n \in \mathbb{N} / n \geq n_0\}$. ***1. Définition d'une suite*** On appelle suite numérique toute fonction définie sur I $(I \subset \mathbb{N})$ et se note $U, V...$ ***2. Vocabulaire*** Soit U une suite numérique définie sur I $(I \subset \mathbb{N})$. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$ le nombre $U(n)$ se note U_n . • La suite U se note $(U_n)_{n \in I}$ ou $(U_n)_{n \geq n_0}$. • Le nombre U_n s'appelle terme générale de la suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ et aussi le terme de rang n. • Le nombre U_{n_0} s'appelle le premier terme de la suite $(U_n)_{n \geq n_0}$ et aussi le terme de rang 0 ***Exemple*** • Le terme général de la suite des nombres pairs est $U_n = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et son premier terme est $U_0 = 2 \times 0 = 0$ • Le terme général de la suite des nombres impairs est $U_n = 2n+1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et son premier terme est $U_0 = 2 \times 0 + 1 = 1$ • ***Suite définie explicitement en fonction de rang*** n Exemple : La suite (U_n) définie par $U_n = 2n+3$ est une suite définie explicitement Telle que $U_0 = 2 \times 0 + 3 = 3$; $U_7 = 2 \times 7 + 3 = 17$ • ***Suite définie par une relation de récurrence*** ***Exemple*** • La suite définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2} U_n + 3 \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$ est une suite définie par une relation de récurrence.	***Exercice ①*** Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite numérique définie par $U_n = \frac{2+5n}{n}$ 1) Calculer les trois premiers termes de $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ 2) Calculer $U_n + 1$, U_{n+1} et U_{2n+1} 3) Déterminer la valeur de n (rang) telle que $U_n = \frac{7}{2}$ ***Remarque*** Il existe deux types de suites : • ***Suite définie explicitement en fonction de rang*** n Ce type permet de déterminer directement les termes de la suite ; en remplaçant n par des valeurs possibles. • ***Suite définie par une relation de récurrence*** Cette suite peut être définie par son premier terme (ou par ses premiers termes) ; et par une relation de récurrence permettant de calculer chaque terme en fonction des termes précédents.

Activité 02

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique définie par $U_n = \frac{2+n}{1+n}$

1) Calculer U_1 , U_2 et U_3
2) Montrer que $1 \le U_n$ et $U_n \le 2$
3) Déduire que $(\forall n\in\mathbb{N});1\le U_n \le 2$

On a $U_1 = \frac{1}{2}U_0 + 3 = \frac{1}{2}\times 1 + 3 = \frac{7}{2}$; $U_2 = \frac{1}{2}U_1 + 3 = \frac{1}{2}\times\frac{7}{2} + 3 = \frac{7}{4} + 3 = \frac{19}{4}$

II. Suite majorée – Suite minorée – Suite bornée

Définitions

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

- On dit que la suite $(U_n)_{n\in I}$ est **majorée** par un nombre réel M si et seulement si $(\forall n\in I);U_n \le M$
- On dit que la suite $(U_n)_{n\in I}$ est **minorée** par un nombre réel m si et seulement si $(\forall n\in I);U_n \ge m$.
- On dit que la suite $(U_n)_{n\in I}$ est **bornée** s'elle est majorée et minorée.

Propriété

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

$(U_n)_{n\in I}$ est bornée $\Leftrightarrow$ $\exists k\in\mathbb{R}_+^* / |U_n| \le k$

Exemple

$U_n = \cos(n) + \sin(n)$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

On a $(\forall n\in\mathbb{N})$; $|U_n| \le 2$ donc (U_n) est bornée.

III. Monotonie d'une suite numérique

Définition

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

On dit $(U_n)_{n\in I}$ est une suite

Croissante si et seulement si $(\forall m\in I)(\forall n\in I);n\prec m \Rightarrow U_n \le U_m$.

Décroissante si et seulement si $(\forall m\in I)(\forall n\in I);n\prec m \Rightarrow U_n \ge U_m$

Constante si et seulement si $(\forall m\in I)(\forall n\in I);n\prec m \Rightarrow U_n = U_m$

Propriété

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

On dit que $(U_n)_{n\in I}$ est une suite

Croissante si et seulement si $(\forall n\in I);U_n \le U_{n+1}$.

Exercice ②

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique définie par

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{U_n + 1} \end{cases};(\forall n\in\mathbb{N})$$

1) Calculer $U_1;U_2$ et U_3
2) Par le principe de récurrence montrer que $(\forall n\in\mathbb{N});U_n = \frac{2}{2n+1}$

Exercice ③

Soit $(U_n)_n$ une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{2}{3} \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{2U_n + 3} \end{cases};(\forall n\in\mathbb{N})$$

1) Calculer U_1 , U_2 et U_3
2) En utilisant le raisonnement par récurrence montrer que (U_n) est majorée par 1 et minorée par 0

Remarque

- Pour étudier la monotonie de $(U_n)_{n\in I}$ on étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$ pour tout $n\in I$
- Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique telle que $(\forall n\in I);U_n \succ 0$

$(U_n)_{n\in I}$ est strictement croissante $\Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$.

$(U_n)_{n\in I}$ est strictement décroissante $\Leftrightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$

Exercice ④

Activité 03

Soit (U_n) une suite numérique définie par $U_n = 2n+3$

1) Calculer les quatre premiers termes de (U_n). Que remarquez-vous ?
2) Calculer $U_{n+1} - U_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Décroissante si et seulement si $(\forall n \in I); U_n \geq U_{n+1}$.

Constante si et seulement si $(\forall n \in I); U_n = U_{n+1}$.

IV. Suite arithmétique

1. Définition

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

On dit que $(U_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique si et seulement si $\exists r \in \mathbb{R} / U_{n+1} = U_n + r$.

Le nombre réel r s'appelle la raison de la suite $(U_n)_{n\in I}$.

Exemple

Soient (U_n) et (V_n) deux suites numériques telles que $U_n = -4n+1$ et $V_n = n^2+2$

⇨ On a

$$(\forall n \in \mathbb{N}); U_{n+1} - U_n = -4(n+1)+1-(-4n+1) = -4n-4+1+4n-1 = -4$$

Donc (U_n) est une suite arithmétique de raison $r = -4$

⇨ Et On a

$$(\forall n \in \mathbb{N}); V_{n+1} - V_n = (n+1)^2 + 2 - (n^2+2) = n^2+2n+1+2-n^2-2 = 2n+1$$

Donc la suite (V_n) n'est pas une suite arithmétique car la différence $V_{n+1} - V_n$ dépend de n.

2. Terme générale d'une suite arithmétique en fonction de n

Propriété

Si $(U_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique de raison r alors $\forall (n,p) \in I^2$ on a $U_n = U_p + (n-p)\times r$.

Exemple

Soit (U_n) une suite arithmétique de raison $r = 2$ et son premier terme est $U_0 = -3$

On a $U_n = U_p + (n-p)r$ donc $U_n = U_0 + (n-0)\times r = -3+2n$

Etudier la monotonie de la suite (U_n) dans les cas suivants

$U_n = \dfrac{2n-1}{n+4}$; $U_n = 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ $U_n = \dfrac{n+1}{2^n}$

$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases}$; $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = U_n - 3n \end{cases}$

Remarque

Pour montrer qu'une suite numérique $(U_n)_{n\in I}$ est arithmétique il suffit de montrer que $(\forall n \in I); U_{n+1} - U_n = r$, de telle sorte que r ne dépend pas de n.

Exercice ⑤

Soit (U_n) une suite arithmétique telle que :

$U_0 = 5$ et $U_{25} = 15$

1) Déterminer r la raison de la suite
2) Exprimer U_n en fonction de n
3) Le nombre 203 est-il un terme de la suite (U_n) ? justifier

Activité 04

Soit (U_n) une suite numérique définie par $(\forall n\in\mathbb{N});U_n=4\times3^n$.

1) Calculer $\frac{U_1}{U_0},\frac{U_2}{U_1}$ et $\frac{U_3}{U_2}$. Que remarquez-vous ?
2) Déduire U_{n+1} en fonction de U_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

⇨ ***Propriété caractéristique d'une suite arithmétique***

Si x , y et z (dans cet ordre) trois termes consécutifs d'une suite arithmétique alors on a $x+z=2y$

Exemple

Soit $(U_n)_n$ une suite arithmétique telle que $U_1+U_2+U_3=15$. Calculer U_2 .

3. Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique

Propriété

Si $(U_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique de raison r alors $\forall(n,p)\in I^2$ on a

$$U_p+U_{p+1}+U_{p+2}+........+U_n=\frac{(n-p+1)}{2}(U_p+U_n).$$

U_p le premier terme de la somme, U_n le dernier terme de la somme et $(n-p+1)$ le nombre termes.

Exemple

Soit (V_n) une suite arithmétique telle que $V_n=2n+3$ .Calculer $S=\sum_{k=0}^{9}V_k$

On a $S=\sum_{k=0}^{9}V_k=\frac{(9-0+1)}{2}(V_0+V_9)$

Et on a $V_0=2\times0+3=3$ et $V_9=2\times9+3=21$ Donc $S=5(3+21)=120$

V. Suite géométrique

1. Définition

Soit $(U_n)_{n\in I}$ une suite numérique.

On dit que $(U_n)_{n\in I}$ est une suite arithmétique si et seulement si $\exists q\in\mathbb{R}\,/\,U_{n+1}=qU_n$.

Le nombre réel q s'appelle raison de la suite $(U_n)_{n\in I}$.

Exemple

Soit (U_n) une suite numérique telle que $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_n=-7\times5^n$.

On a $U_{n+1}=-7\times5^{n+1}=-7\times5^n\times5=5U_n$.

Donc (U_n) est une suite géométrique de raison 5.

2. Terme générale d'une suite arithmétique en fonction de

Exercice ⑥

Soit (U_n) une suite arithmétique telle que :

$U_3=5$ et $U_{12}=20$

1) Déterminer r la raison de la suite (U_n). Puis déduire U_n en fonction de n
2) Calculer $S=U_3+U_4+.....+U_{15}$

Remarque 01

Pour montrer qu'une suite numérique $(U_n)_{n\in I}$ est géométrique il suffit de montrer que $(\forall n\in I);\frac{U_{n+1}}{U_n}=q(U_n\neq0)$, de telle sorte que q ne dépend pas de n .

Remarque 02

Soit $(U_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q .

Propriété

Si $(U_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q alors $\forall(n,p)\in I^2$ on a $U_n = U_p \times q^{n-p}$.

⇨ ***Propriété caractéristique d'une suite géométrique***

Si x , y et z (dans cet ordre) trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors on a $x\times z = y^2$.

Exemple

Soit (U_n) une suite géométrique telle que $U_1\times U_2\times U_3 = 27$. Calculer U_2

3. Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique

Propriété :

Si $(U_n)_{n\in I}$ est une suite géométrique de raison q $(q\neq 1)$, alors La somme des termes consécutifs $S = U_p + U_{p+1} + U_{p+2} + ... + U_n$

est $S = U_p \times\left(\dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$.

Exercice de synthèse

Soit $(U_n)_n$ une suite numérique définie par $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{5}U_n + 2 \end{cases}$;$(\forall n\in\mathbb{N})$

1) Calculer U_1, U_2 et U_3
2) Soit (V_n) une suite numérique définie par $V_n = \dfrac{5}{2} - U_n$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique, en déterminant sa raison et son premier terme.

b) Exprimer V_n en fonction de n.

c) Déduire U_n en fonction de n.

d) Calculer $S = \sum_{k=0}^{9} V_k$.

- Si $p = 0$ alors $U_n = U_0 \times q^n$.
- Si $p = 1$ alors $U_n = U_1 \times q^{n-1}$.
- Si $q = 1$ alors la suite $(U_n)_{n\in I}$ est une suite constante.

Exercice ⑦

Soit (U_n) est une suite géométrique de raison q telle que $U_1 = -2$ et $U_4 = 5$.
Déterminer la raison de la suite (U_n) puis déduire le terme général en fonction de n

Exercice ⑧

Soit (U_n) une suite géométrique telle que $U_0 = 2$ et $q = -3$.

1) Exprimer U_n en fonction de n .
2) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_9
3) Calculer $S = \sum_{k=1}^{9} U_k$