Fiche technique

Professeur : Mouad ZILLOU	Matière : Mathématiques

Polynômes

	Durée : 4 heures	Niveau : TCSF
Capacités attendues	• Maitriser la technique de la division euclidienne par $x-\alpha$ et reconnaitre la divisibilité par $x-\alpha$.	
Contenu du programme	• Notion de polynôme, égalité de deux polynômes. • Somme et produit de deux polynômes. • Racine d'un polynôme, division par $x-\alpha$. • Factorisation d'un polynôme.	
Recommandations pédagogiques	• Il faudra écarter toute construction théorique de la notion de polynôme. On se basera pour son introduction **sur** des exemples simples en indiquant les éléments caractéristiques d'un polynôme (degré, termes, coefficient). • La technique de la division euclidienne par $x-\alpha$ joue un rôle dans la factorisation d'un polynôme dont une racine est α , toutefois une importance devra être accordée aux autres techniques de factorisation.	
Fichiers utilisés dans la préparation du cours	• Les orientations pédagogiques. • Livre d'élève. • Des sites électroniques. • Distribution périodique du programme de mathématiques.	
Rôle de l'enseignant	• Ecrire l'activité au tableau • Marquer les difficultés • Répartir les tâches • Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle • Diagonaliser les prérequis des apprenants • Noter les observations	
Rôle de l'apprenant	• Ecrire les activités • Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions. • Formuler les résultats de l'activité sous forme d'un théorème, une propriété… • Répondre aux exercices	

Outils didactiques : Tableau, livre ,craie, marqueurs ……

Etapes	***Contenu du cours***	**Durée**
Activité d'initiation	***I. Définition d'un polynôme –égalité de deux polynômes –opérations sur les polynômes*** Soit un parallélépipède dont les dimensions sont $x, x+3$ et $x+5$ avec x est un réel positif. Calculer $V(x)$ le volume du parallélépipède.	**60 minutes**
Résumer du cours	***Définition d'un polynôme*** On appelle polynôme (ou fonction polynôme) ,se note souvent P ,une expression (ou fonction) de la forme : $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0x^0=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$ Où $a_n, a_{n-1}............., a_0$ sont des nombres réels et s'appellent les **coefficients** du polynôme P. Si $a_n \neq 0$ alors n s'appelle le degré du polynôme P et se note $d°P$ tel que $d°P=n$ Si tous les coefficients sont nuls alors le polynôme P s'appelle le polynôme nul (sans degré) . ***Exemple*** : On considère l'expression suivante $P(x)=-5x^4+3x^2+4x-7$ $P(x)$ est un polynôme de degré 4 ; on écrit $d°P=4$ Les nombres réels $-5,\ 0,3,\ 4,-7$ sont les coefficients de $P(x)$ car on peut écrire $P(x)$ sous forme $P(x)=-5x^4+0x^3+3x^2+4x-7$. ***Remarque :*** Soit a un nombre réel non nul. '' $P(x)=ax+b$ ''est le polynôme de degré 1 s'appelle binôme. '' $P(x)=ax^2+bx+c$ ''est un polynôme de degré 2 s'appelle trinôme. ***Exemple :*** $P(x)=2x-3$ est un binôme. // $P(x)=-3x^2+2x+4$ est un trinôme.	
Evaluation	1) Donner l'expression d'un polynôme $P(x)$ dont le degré est 6 et ses coefficients sont -1, 0, 0,-3,1 et 2. 2) Parmi les expressions suivantes, préciser celles qui représentent un polynôme en précisant son degré. $P(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-3$; $Q(x)=2x^2-x-\sqrt{x}$; $R(x)=5\|x\|^2+4\|x\|-5$; $S(x)=(a-1)x^4+x+1; (a\in\mathbb{R})$	
Résumer du cours	***2. Egalité de deux polynômes*** ***Propriété*** : Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes. On dit que $P(x)$ et $Q(x)$ Sont **égaux** si et seulement si : • Ils ont même degré • Les coefficients des termes en même degré sont deux à deux égaux . Signifier que : si $\begin{cases} P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0 \\ et \\ Q(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_0 \end{cases}$ Alors $\begin{cases} d°P=d°Q \Leftrightarrow n=m \\ a_n=b_m; a_{n-1}=b_{m-1};.............; a_0=b_0 \end{cases}$	**60 minutes**

Exemple

Etudions l'égalité de $P(x)$ et $Q(x)$ tels que :

$P(x)=4x^3+3x^2-4x+1$ Et $Q(x)=3x^2+x^3-4x+1+3x^3$

$$\begin{cases} d°p=d°Q=3 \\ \textit{les termes de même degré ont mêmes coefficients} \end{cases}$$

Alors $P(x)=Q(x)$

Evaluation

1) Etudier l'égalité de $P(x)$ et $Q(x)$ dans les cas suivants :

   a) $P(x)=x^3-3x^2+3x-1$; $Q(x)=(x+1)^3$

   b) $P(x)=x^3+(x-1)^2$; $Q(x)=x^2-3x+4$

   c) $P(x)=x^3+2x^2(x-1)+x$; $Q(x)=x^2(3x-2)+x$

2) Déterminer le nombre réel a pour que $P(x)=Q(x)$

$P(x)=(a-1)x^3+2ax^2+5x+6$; $Q(x)=x^3+4x^2+(3+a)x+3a$

3) Déterminer a et b et c et d pour que $P(x)=Q(x)$

$P(x)=ax^3+(b-2)x^2+(4-c)x+d$; $Q(x)=-3x^3+x^2+7$

Résumer du cours

30 minutes

3. Operations sur les polynômes

a. Somme de deux polynômes

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes

La somme de $P(x)$et $Q(x)$ est le polynôme qu'on note $P+Q$ tel que :

$(P+Q)(x)=P(x)+Q(x)$

Exemples :

- On a : $P(x)=x^4-x^3+2x^2-1$ et $Q(x)=3x^3-2x^2+2x-4$

Donc $P(x)+Q(x)=x^4+2x^3+2x-5$

- On a $P(x)=2x^2+3x+4$ et $Q(x)=-2x^2+x-1$

Donc $P(x)+Q(x)=4x+3$

Remarque :

Si $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes non nuls et $P+Q$ un polynôme non nul alors on a

$d°(P+Q)\leq d°P$ OU $d°(P+Q)\leq d°Q$

b. Produit de deux polynômes

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes.

Le produit de $P(x)$et $Q(x)$ est le polynôme qu'on note $P\times Q$ tel que

$(P\times Q)(x)=P(x)\times Q(x)$

Exemple :

On a $P(x)=x^2+1$ et $Q(x)=x-1$

Donc $P(x)\times Q(x)=(x^2+1)(x-1)=x^3-x^2+x-1$

Remarque :

Si $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes non nuls, alors on a $d°(P\times Q)=d°P+d°Q$

Evaluation

On considère les deux polynômes suivants

$f(x)=2x^2+3x-2$ et $g(x)=x^3-x^2+1$

Calculer les expressions suivantes

$A(x)=2f(x)-3g(x)$; $B(x)=f(x)\times g(x)$; $C(x)=\left(f(x)\right)^2$ et $D(x)=\left(g(x)\right)^2$

Résumer du cours

90 minutes

II. La divisions par $x-\alpha$

1. La division euclidienne d'un polynôme par $x-\alpha$

a. Définition et propriété

Soit $P(x)$ un polynôme de degré n $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$ et soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

S'il existe un polynôme $Q(x)$ qui vérifié : $P(x)=(x-\alpha)Q(x)+P(\alpha)$; alors :

- $Q(x)$: S'appelle **quotient** de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-\alpha$.
- $P(\alpha)$: S'appelle reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-\alpha$.

Exemple $P(x)=x^2-8$, $x-\alpha=x-3$

On a $P(x)=(x-3)(x+3)+1$

Donc : $x+3$ est le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-3$

1: est le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $x-3$.

b. Racine d'un polynôme

Définition

Soit $P(x)$ un polynôme et $\alpha\in\mathbb{R}$

On dit que α est une racine de $P(x)$ si et seulement si $P(\alpha)=0$

Exemple

Parmi les nombres suivants déterminons qui sont les racines de $P(x)$

$P(x)=x^2-2x+1$ / 1, -2 et 3

c. La division euclidienne de $P(x)$ sur $x-\alpha$

Pour effectuer la division euclidienne de $P(x)$ par $x-\alpha$,on suit même étapes que celle des nombres entiers naturels.

Exemple

Effectuons la division euclidienne de $P(x)=2x^3+x^2-x+1$ par $x+1$

2. La divisibilité par $x-\alpha$

Soit $P(x)$ un polynôme et $\alpha\in\mathbb{R}$ avec $d°P=n$

- Ont dit que $P(x)$ est divisible par $x-\alpha$, s'il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n-1$ tel que $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$
- $P(x)$ est divisible par $x-\alpha$ si et seulement si α est un zéro ou racine de $P(x)$

Exemple

On considère le polynôme suivant : $P(x)=x^3-3x^2-6x+8$

Etudier la divisibilité de $P(x)$ par $x-1$.

On a $P(1)=1^3-3\times1^2-6\times1+8=1-3-6+8=0$

Donc $P(x)$ est divisible par $x-1$.

Exercice de synthèse

Soit $P(x)$ un polynôme définie par $\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{x}\right)=2\boldsymbol{x}^4-9\boldsymbol{x}^3+14\boldsymbol{x}^2-9\boldsymbol{x}+2$

1) Montrer que si α est une racine de $P(x)$ alors $\dfrac{1}{\alpha}$ est aussi est une racine de $P(x)$

2) a- Montrer que 2 est une racine de $P(x)$

b- En effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x-2$, déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que $P(x)=(x-2)Q(x)$ puis déduire que $Q(1/2)=0$

3) Déterminer a , b et c tels que $\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{x}\right)=\left(\boldsymbol{x}-1/2\right)\left(\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{c}\right)$

4) Factoriser $P(x)$ en produit des binômes puis résoudre l'équation $P(x)=0$