|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Produit scalaire dans le plan*** |  |  |
| 1. *Produit scalaire de deux vecteurs*

*Définition:*Soient  et  deux vecteurs du plan et  trois points du plan tels que :  et  . Soit  le projeté orthogonal de  sur la droite .Le ***produit scalaire*** des deux vecteurs et , noté , est le ***nombre réel*** défini comme suit :* Si  et  ont même sens, alors :  .
* Si  et  ont des sens contraires, alors :  .

*Application* ➀*:*Soit un trapèze rectangle tel que: et soient  et les milieux respectifs de. (Voir la figure).  Calculer les produits scalaires suivants :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |

*Propriété* **: *Formule trigonométrique du produit scalaire**** Soient  et  deux vecteurs du plan, on a :  .
* Soient  trois points du plan, on a :  .

*Application* ➁*:*1. Soient  et  deux vecteurs du plan. Calculer dans les deux cas suivants :

➊.➋.1. Soit  un triangle équilatéral tel que . Calculer .
2. Soit  un triangle isocèle en  tel que . Calculer .
3. Soient  et  deux vecteurs du plan. Déterminer les mesures possibles de l’angle orienté sachant que : .

*Exercice :*ABC un triangle isocèle en A tels que et .1. Calculer .
2. En déduire  et .
3. *Propriétés du produit scalaire :*

*Propriété* **:** Soient  trois vecteurs du plan et  un réel. On a :*
*
*
* **(** est appelé ***carré scalaire*** de )

*Application* ➂*:*Soient  et  deux vecteurs du plan tels que : .Calculer .*Propriété* **:** Soient  deux vecteurs du plan. On a :* $\left‖\vec{u}+\vec{v}\right‖^{2}=\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^{2}=\left‖\vec{u}\right‖^{2}+2\vec{u}.\vec{v}+\left‖\vec{v}\right‖^{2}$.
* $\left‖\vec{u}-\vec{v}\right‖^{2}=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^{2}=\left‖\vec{u}\right‖^{2}-2\vec{u}.\vec{v}+\left‖\vec{v}\right‖^{2}$.
* $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^{2}-\vec{v}^{2}=\left‖\vec{u}\right‖^{2}-\left‖\vec{v}\right‖^{2}$*.*
* $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(\left‖\vec{u}+\vec{v}\right‖^{2}-\left‖\vec{u}\right‖^{2}-\left‖\vec{v}\right‖^{2})$*.*
* $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}(-\left‖\vec{u}\right‖^{2}-\left‖\vec{v}\right‖^{2}-\left‖\vec{u}-\vec{v}\right‖^{2})$.

*Application* ➃*:*1. Soient  et  deux vecteurs tels que :.

Calculer : *et* .1. Soient  et  deux vecteurs tels que :.

Calculer : *et* .*Propriété* **:** Soient  trois points du plan, on a : .***🔾Démonstration :****Application* ➄*:*1. Soient  trois points du plan tels que :.

 Calculer : *et* *.*1. Soit un triangle rectangle en A. Calculer :.

*Propriété* **:** Soient  deux vecteurs du plan.  sont ***orthogonaux***, et on écrit , si et seulement si *Application* ➅*:*Soient  deux vecteurs orthogonaux du plan tels que : .Déterminer le réel sachant que : .*Exercice :*ABC est un triangle , et .1. Calculer .
2. Considérons un point du plan défini par : .

a)- Calculer .b)- Conclure.1. *Théorème d’Al-Kachi*

Soit un triangle. On a : .Donc : .Par conséquent : .*Théorème* **: *Théorème d’Al-Kachi*** Soit un triangle. On a :*
*
*

*Application* ➆*:*1. est un triangle tel que, et . Calculer .
2. est un triangle tel que, et . Calculer .
3. *Théorème de la médiane*

Soit un triangle etle milieu de  . Calculons  en fonction de et .$$ MA^{2}+MB^{2}=\vec{MA}^{2}+\vec{MB}^{2}=(\vec{MI}+\vec{IA})^{2}+(\vec{MI}+\vec{IB})^{2}=2 MI^{2}+\frac{1}{2}AB^{2}$$*Théorème* **: *théorème de la médiane***Soit un triangle etle milieu de . On a : .*Application* ➇*:*un triangle et  , et  les milieux respectifs de  ,  et  .Sachant que :, et, calculer les distances  ,  et .*Exercice :*$ABCD$ est un parallélogramme tel que $\hat{BAD}=\frac{π}{3}$ et $ AD=4$ et $CD=6$ et soit $O$ le milieu du segment $\left[ AB\right]$ .1. Calculer les distances $BD$ et $AC$ .
2. Montrer que pour tout point $M$ du plan que .
3. En déduire l’ensemble des points $M$ du plan tel que $MA^{2}+MB^{2}=24$.
4. *Relations métriques dans un triangle rectangle*

*Propriété* **:** Soient  un triangle et  le projeté orthogonal de  sur  et  le milieu de . est rectangle en  si et seulement si l'une des relations suivantes est vérifiée :* .
* .
* .
* .

*Application* ➈*:*Soient ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonal de A sur (BC) et AB=3 , AC=4 . Calculer les longueurs BC, HC, HB et AH *Exercice de synthèse :*Soit  un triangle tel que :  et  et .1. Vérifier que :.
2. Calculer la distance .
3. Soientetles milieux respectifs de  et .

a/- Calculer  et.b/- Calculer .1. Soit un point du plan tel que :  .

a/- Ecrire le vecteur en fonction de  et.b/- Montrer que les droites et  sont perpendiculaires . |  |  |
|  |  |  |