Département de Mathématiques
Faculté des Sciences

Université Ibn Zohr, Agadir
A.U. 2019/2020

Analyse (SMA/SMI) : TD2

Exercice 1 : (Application de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$)
Trouver toutes les fonctions continues de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x) + f(y). \qquad \text{(E)}$$

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels telle que la suite $(|u_n|)_n$ ne tends pas vers $+\infty$. Montrer qu'il existe une sous-suite convergente de $(u_n)_{n\geq 0}$.

Exercice 3 : Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $f : K \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

Montrer que
$f(K)$ est un compact. Que peut-on conclure ?

Exercice 4 : Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels. On suppose que les sous-suites
$(u_{2n})_n$, $(u_{3n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont convergentes. Montrer que la suite $(u_n)_n$ est convergente.

Exercice 5 : Montrer que si K est un compact de $\mathbb{R}$ et F un fermé de $\mathbb{R}$ alors $K + F$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : Soit $(v_n)_n$ une suite de nombres réel tel qu'ils existent des consantes $\gamma \in]0, 1[$
et $c > 0$ véri ants

$$|v_{n+1} - v_n| \leq c\,\gamma^n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Montrer que $(v_n)_n$ est une suite convergente.

Exercice 7 : Soit $g : [a, b] \to [a, b]$ une fonction continue véri ant

$$|g(t) - g(s)| < |t - s|, \ \forall t, s \in [a, b], \ t \neq s.$$

(1) Montrer qu'il existe un unique $\lambda \in [a, b]$ solution de l'équation $g(x) = x$.

(2) Soit la suite récurrente $v_0 \in [a, b]$ et $v_{n+1} = g(v_n)$ pout tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite $(|v_n - \lambda|)_{n\geq 0}$ est monotone et est convergente vers une limite μ.

(3) Montrer qu'il existe une sous-suite $(v_{\phi(n)})_{n\geq 0}$ de la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ telle que $v_{\phi(n)} \to \rho$ avec $\rho = \lambda + \mu$ ou $\rho = \lambda - \mu$.

(4) Dans cette question on suppose que $\rho = \mu + \lambda$. En utilisant la question (1), montrer que $\mu = 0$ et que $v_n \to \lambda$ quand $n \to +\infty$.