UNIVERSITE MOHAMED 1er
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique
Oujda

SMAI Semestre 2
Algèbre 2
Contrôl Final
Année 2011/2012
Durée 3 heures

Session ordinaire du printemps 2012

`http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2`
mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III, IV,V et VI sont indépendants

I Décomposer en éléments simples. dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction :

$$F = \frac{2X^4}{(X+1)^2(X^2+3)}$$

II On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ le système :

$$\mathscr{S} = ((2,-1,0,1),(1,-1,1,1),(7,-4,1,1),(4,-3,2,3))$$

1 Donner le rang de $\mathscr{S}$ (Justifier votre réponse)

2 Donner une base de $vect(\mathscr{S})$

3 Donner la décomposition des autres éléments de $\mathscr{S}$ dans la base ci-dessus.

III Soit K un corps commutatif et E le sous ensemble de $K(X)$:

$$E = \left\{ \frac{a_0 + a_1 X + a_2 X^2}{X(X-1)} \mid a_0, a_1, a_2 \in K \right\}$$

1 Montrer que E est un sous espace vectoriel de $K(X)$

2 Montrer que $1, 1/X, 1/(X-1) \in E$

3 Montrer que $B = (1, 1/X, 1/(X-1))$ est une base de E

Soit $f \ : E \longrightarrow E \quad \frac{a_0 + a_1 X + a_2 X^2}{X(X-1)} \longrightarrow \frac{a_0 + a_1(1-X) + a_2(1-X)^2}{X(X-1)}$

4 Montrer que f est un endomorphisme de E

5 Calculer $M_B(f)$

6 Ecrire matricielement la relation $f(v) = 0$

7 Montrer que f est injective

8 En déduire que f est un automorphisme de E

Soit $B' = (1/(X(X-1)), X/(X(X-1)), (X+1)/X)$

9 Montrer que B' est libre

10 En déduire que B' est une base de E

11 Donner la matrice de passage de B à B'

12 Calculer $M_{B'}(f)$

IV Soient A,B,C des matrices de types respectivement $(m,n),(p,q)$ et (r,s). Trouver toutes les valeurs possibles de (m,n,p,q,r,s) pour que ABC, CAB et BCA soient définies.

V Soit $E=\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$ un ensemble fini à n éléments et K un corps commutatif.

1 Montrer que l'application $\varphi\ : K^E \longrightarrow M_{n,1}(K) \qquad f \longrightarrow \varphi(f)=\begin{pmatrix} f(x_1)\\ f(x_2)\\ \vdots \\ f(x_n)\end{pmatrix}$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

2 Soient $(f_1,f_2,\ldots,f_p)$ un système de K^E. Soit $A=(f_j(x_i))\in M_{n,p}(K)$. Montrer que :

$$(f_1,f_2,\ldots,f_p)\ libre \Longleftrightarrow rang(A)=p$$

3 En déduire que :

$$(f_1,f_2,\ldots,f_p)\ libre \Longleftrightarrow \exists y_1,y_2,\ldots y_p\in E\ tel\ que\ (f_j(y_i))\ inversible$$

VI Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f,g\in\mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E.

1 Montrer que $Im(f\circ g)\subset Im(f)$

2 En déduire que $rg(f\circ g)\le rg(f)$

3 Montrer que $Ker(g)\subset Ker(f\circ g)$

4 En déduire que $rg(f\circ g)\le rg(g)$

5 Soit $x\in Ker(f\circ g)$ montrer que $g(x)\in Ker(f)$
Soit l'application linéaire $\theta\ : Ker(f\circ g)\longrightarrow Ker(f) \qquad x\longrightarrow g(x)$

6 Montrer que $Ker(\theta)=Ker(g)$

7 Montrer que $Im(\theta)=Im(g)\cap Ker(f)$

8 Montrer que

$$\dim(Ker(f\circ g))\le \dim(Ker(f))+\dim(Ker(g))$$

9 Montrer que cette inégalité est une égalité si et seulement si $Ker(f)\subset Im(g)$

10 Montrer que

$$rg(f)+rg(g)-\dim(E)\le rg(f\circ g)\le \inf(rg(f),rg(g))$$