Faculté des sciences Agadir **Session d'automne 2010/2011**

Filières SM & SMI **Module : Algèbre 1**

Contrôle (rattrapage) de durée : 3h

(SM1)

EXERCICE 1 : (4pts)

a) Montrer que $7\ divise\ \ 3^{2n+1}+2^{n+2}$ par récurrence puis à l'aide des congruences.
b) Montrer par un contre exemple que l'implication $p,q,a \in \mathbb{N}, p/a\ ,et\ q\ /\ a \Rightarrow pq\ /\ a$ est fausse ; donner une condition sur $p\ et\ q$ pour qu'elle soit vraie.

EXERCICE 2 : (6pts)

Montrer que $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ muni de la loi de composition interne $*$ définie par :

$(a,b)*(c,d)=(ac,ad+b)$ est un groupe. Est-il commutatif ? Les sous-ensembles suivants

$F=\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$; $G=\{1\}\times\mathbb{R}$; $H=\mathbb{Q}^*\times\mathbb{Q}$ et $H=\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}$ sont-ils des sous groupes de $\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}$?

EXERCICE 3 : (4pts)

a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $P=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{X^k}{k!}=1+X+\frac{X^2}{2!}+....+\frac{X^n}{n!}$. Calculer $P-P'$ puis en déduire que tous les racines de P dans $\mathbb{C}$ sont simples.
b) Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle suivante : $\boldsymbol{F=\frac{X^5}{(X-1)^3(X^2+1)}}$.

EXERCICE 4 : (6pts)

Montrer que l'équation $ax+by=c$ admet une solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ ssi $pgcd(a,b)divise\ c$.

Un phare émet un signal jaune toutes les 15 minutes et un signal rouge toutes les 18 minutes. On aperçoit le signal jaune à $0h02mn$ et le rouge à $0h08mn$. A quelle heure verra-t-on pour la première fois les deux signaux émis en même temps ?

Si maintenant on aperçoit le signal jaune à $0h02mn$ et le rouge à $0h06mn$, pourra-t-on voir les deux signaux émis en même temps ?