UNIVERSITE MOHAMED 1er
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique
Oujda

SMAI Semestre 2
Algèbre 2
Contrôl Final
Année 2009/2010
Durée 3 heures

Session de rattrapage 2010

http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2
email : mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III, IV et V sont indépendants

I Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction :

$$F = \frac{X^6+1}{X(X^2+X+1)^2}$$

II On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\mathscr{S} = ((1,1,0),(1,0,1),(0,2,1),(1,1,3))$$

1 Donner le rang de $\mathscr{S}$ (Justifier votre réponse)

2 Donner une base de $vect(\mathscr{S})$

3 Donner la décomposition des autres éléments de $\mathscr{S}$ dans la base ci-dessus.

III Soit $f \ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad (x,y,z) \longrightarrow (x+y+2z, x-y+z)$

1 Montrer que f est linéaire

2 Ecrire la matrice de f dans la bases (canoniques) $B = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ et $B' = ((1,0),(0,1))$

3 Ecrire matriciellement la relation $f(v) = 0$

4 Calculer $Ker(f)$

5 En déduire que f est surjective.

6 Soit $B'_2 = ((1,2),(1,1))$. Montrer que B'_2 est une base de $\mathbb{R}^2$

7 Ecrire la matrice de f dans les bases B et B'_2

8 Donner la matrice de passage de B' à B'_2

9 Vérifier la formule de changement de base entre $M_{BB'}(f)$ et $M_{BB'_2}(f)$

IV Soit dans $M_3(\mathbb{R})$ la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1 Justifier que le polynôme caractéristique de A est $P_A = -(X+1)(X-2)^2$

2 Donner les valeurs propres de A

3 Donner les vecteurs propres de A

4 Justifier que A est diagonalisable.

5 Donner une matrice $P \in M_3(\mathbb{R})$ inversible et une matrice $D \in M_3(\mathbb{R})$ diagonale tel que $P^{-1}AP = D$

V Soit E un espace vectoriel de dimension fini. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme de E. On note $f^2 = f \circ f$ et $f^3 = f \circ f \circ f$. On suppose que $f^3 = 0$

.

1 Montrer que $Im(f^2) \subset Ker(f)$

2 En déduire que $rg(f) + rg(f^2) \leq dim(E)$

3 Montrer que $f(Im(f)) = Im(f^2)$

4 Soit $g \ : Im(f) \longrightarrow Im(f^2) \ x \longrightarrow f(x)$. Montrer $Ker(g) = Im(f) \cap Ker(f)$

5 Monter que $Im(f^2) \subset Ker(g)$

6 En déduire que $2rg(f^2) \leq rg(f)$