Corrigé du contrôle 2010

EXERCICE 1 :

a) La proposition est fausse car elle signifie que $\mathbb{R}$ est minoré par $(-x)$. Sa négation est : $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}\ \ tel\ que\ x + y \leq 0$.
b) La proposition est vraie car il suffit de prendre par exemple $y = -x - 1$. Sa négation est : $\exists x \in \mathbb{R}\ tel\ que\ \forall y \in \mathbb{R}\ \ x + y \leq 0$.
c) La proposition est fausse car elle signifie que la somme de deux réels quelconques est strictement positive (ce qui est faux). Sa négation est : $\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R}, x + y \leq 0$.

EXERCICE 2 :

Les propriétés de la loi $*$ définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par : $(a, b) * (c, d) = (a + c, bd)$:

- Elle est commutative et associative (facile à vérifier !!).
- Existence de l'élément neutre : $(x, y) * (a, b) = (x, y) \Leftrightarrow (x + a, yb) = (x, y) \Leftrightarrow x + a = x\ \ et\ yb = y \Leftrightarrow a = 0\ \ et\ \ b = 1$, puisque $x\ et\ y$ sont des réels quelconques, donc $(0,1)$ est bien l'élément neutre.
- Existence de l'élément symétrique : $(x, y) * (x^{'}, y') = (0,1) \Leftrightarrow (x + x', yy') = (0,1) \Leftrightarrow x + x^{'} = 0\ \ et\ yy^{'} = 1 \Leftrightarrow x^{'} = -x\ \ et\ \ y^{'} = \frac{1}{y}\ \ si\ y \neq 0$, donc les éléments de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ de la forme $(x, 0)$ n'ont pas de symétrique.

Ainsi $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, *)$ n'est pas un groupe mais $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, *)$ est bien un groupe !!

EXERCICE 3 :

D'abord on signale que d'après le théorème chinois ce système de congruence a bien des solutions car $5, 6\ et\ 7$ sont premiers entre eux.

$x \equiv 1[5] \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}\ tel\ que\ \ x = 5k + 1$, donc $x \equiv 2[6] \Longrightarrow 5k + 1 \equiv 2[6] \Longrightarrow 5k \equiv 1[6]$ comme $5.5 = 25 \equiv 1[6]$, on multiplie par 5 et on obtient $k \equiv 5[6]$ c-à-d $k = 6h + 5, h \in \mathbb{Z}$, par suite $x = 5(6h + 5) + 1 = 30h + 26$; la dernière équation donne $30h + 26 \equiv 3[7]$.

Comme $3 - 26 = -23 \equiv 5[7]\ \ et\ \ 30 \equiv 2[1]$ on déduit $2h \equiv 5[7]$ et par suite $h \equiv 6[7]$ car $2.4 = 8 \equiv 1[7]\ \ et\ 4.5 = 20 \equiv 6[7]$. D'où $h = 7l + 6\ \ et\ x = 30(7l + 6) + 26 = 210l + 206,\ \ l \in \mathbb{Z}$.

EXERCICE 4 :

Il est clair que $2222 \equiv 2[5]$, ensuite $2^4 = 16 \equiv 1[5]$ et $3333 = 4.833 + 1$ donc

$2222^{3333} \equiv 2^{3333} = (2^4)^{833}.2 \equiv 1.2 \equiv 2[5]$. De même on a : $3333 \equiv 3[5]$, ensuite

$3^4 = 81 \equiv 1[5]\ \ et\ \ 2222 = 4.555 + 2$ donc $3333^{2222} \equiv 3^{2222} = (3^4)^{555}.3^2 \equiv 1.4[5]$.

D'où $2222^{3333} + 3333^{2222} \equiv 2 + 4 = 6 \equiv 1[5]$ et par suite le reste de la division de $2222^{3333} + 3333^{2222}$ par 5 est 1.

EXERCICE 5 :

$8\ divise\ 24 = 4.6\ \ mais\ 8\ ne\ divise\ ni\ 4\ ni\ 6$, pour que l'implication soit vraie on fait l'hypothèse $a\ est\ premier$.

EXERCICE 6 :

On a $P = X^4 - 4X^3 + 16X - 16$, donc $P^{'} = 4X^3 - 12X^2 + 16 = 4(X^3 - 3X^2 + 4)$. Pour calculer $pgcd(P, P^{'})$ on applique l'Algorithme d'Euclide : la division euclidienne de $P\ par\ \frac{1}{4}P'$ donne pour reste $R_1 = -3(X^2 - 4X + 4)$, puis le reste de la div. Eucl. de $\frac{1}{4}P'$ parR_1 est nul, donc $pgcd(P, P^{'}) = R_1 = -3(X^2 - 4X + 4) = -3(X-2)^2$, (c'est le dernier reste non nul !). D'où $(X-2)^3\ divise\ P,\ donc\ P = (X-2)^3(X-\propto)$; le terme constant de $P\ \ donne\ 8 \propto = -16,\ \ donc\ \ \propto = -2$. Ainsi $P = (X-2)^3(X+2)$.

EXRCICE 7 :

a) En posant $X - 1 = Y$ on obtient $F = \frac{1+Y}{Y^6(2+2Y+Y^2)}$; la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre 6 $de\ \ 1 + Y\ \ par\ 2 + 2Y + Y^2$ donne :
$1 + Y\ = (\ 2 + 2Y + Y^2)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}Y^2 + \frac{1}{4}Y^3 - \frac{1}{8}Y^4\right) - \frac{1}{8}Y^6$; donc
$\frac{1+Y}{Y^6(2+2Y+Y^2)} = \frac{1}{2Y^6} - \frac{1}{4Y^4} + \frac{1}{4Y^3} - \frac{1}{8Y^2} - \frac{1}{8(2+2Y+Y^2)}$; en revenant à la variable X, on a :
$\mathrm{F} = \frac{1}{2(X-1)^6} - \frac{1}{4(X-1)^4} + \frac{1}{4(X-1)^3} - \frac{1}{8(X-1)^2} - \frac{1}{8(1+X^2)}$.

b) On signale d'abord que $X^2 + X + 1$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, pour la DES de F on procède comme suit :

- La division euclidienne de $X^6 + X\ \ par\ \ X^2 + X + 1$ donne :

$X^6 + X\ \ = (X^2 + X + 1)(X^4 - X^3 + X - 1) + (X + 1)$, donc

$F = \frac{X^6+X}{(X^2+X+1)^4} = \frac{X^4-X^3+X-1}{(X^2+X+1)^3} + \frac{X+1}{(X^2+X+1)^4}$. (le terme $\frac{X+1}{(X^2+X+1)^4}$ est un élément simple !)

- La division euclidienne de $X^4 - X^3 + X - 1$ par $X^2 + X + 1$ donne :
$X^4 - X^3 + X - 1 = (X^2 + X + 1)(X^2 - 2X + 1) + (2X - 2)$, donc :
$\frac{X^4-X^3+X-1}{(X^2+X+1)^3} = \frac{(X^2-2X+1)}{(X^2+X+1)^2} + \frac{2X-2}{(X^2+X+1)^3}$, ($\frac{2X-2}{(X^2+X+1)^3}$ est élément simple)
Comme $\frac{(X^2-2X+1)}{(X^2+X+1)^2} = \frac{X^2+X+1-3X}{(X^2+X+1)^2} = \frac{1}{X^2+X+1} - \frac{3X}{(X^2+X+1)^2}$, on déduit :
$F = \frac{X^6+X}{(X^2+X+1)^4} = \frac{X+1}{(X^2+X+1)^4} + \frac{2X-2}{(X^2+X+1)^3} - \frac{3X}{(X^2+X+1)^2} + \frac{1}{X^2+X+1}$.

EXERCICE 8 : (Axiomes des quotients)

i) Soit $e \in E \; tel \; que \; e * a = a$, soit $x \in E$, comme γ_a est surjective, $\exists y \in E$ tel que $x = a * y$; montrons que $e * x = x$. On a :
$e * x = e * (a * y) = (e * a) * y = a * y = x.$

ii) Comme δ_a est surjective, il existe $e \in E$ tel que $e * a = a$; d'après i) e est bien élément neutre à gauche. De même γ_a est surjective, il existe $e' \in E$ tel que $a * e' = a$ et pour $x \in E$ il existe $y \in E$ tel que $x = y * a$ (δ_a est surjective), donc $x * e' = (y * a) * e' = y * (a * e') = y * a = x$, donc e' est élément neutre à droite. D'après l'unicité de l'élément neutre, on a : $e = e'$ est l'élément neutre.

iii) Soit $a \in E$, puisque δ_a est surjective, $\exists a_1 \in E \; tel \; que \; a_1 * a = e$ et puisque γ_a est surjective, $\exists a_2 \in E \; tel \; que \; a * a_2 = e$, comme la loi est associative on a $a_1 = a_2$, donc a possède un élément symétrique ; par suite $(E,*) \; est \; un \; groupe.$