UNIVERSITE MOHAMED 1er
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique
Oujda

SMA-SMI Semestre 2
Algèbre 2
Contrôl Final
Année 2008/2009
Durée 3 heures

Session de rattrapage 2009

`http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2`
email : mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III et IV sont indépendants

I Soit A un anneau. On pose $m = Car(A)$ la caractéristique de A. On suppose que

$$\forall x \in A \qquad x^6 = x \qquad (*)$$

1 Montrer que $\forall x \in A \qquad 62x = 0$ (Indication faire $x' = 2x$ dans $(*)$)

2 Montrer que $\forall x \in A \qquad 726x = 0$ (Indication faire $x' = 3x$ dans $(*)$)

3 En déduire que m divise 2. (On donne $62 = 2.31 \quad 726 = 2.3.11.11$)

4 En déduire que $\forall x \in A \qquad 2x = 0$

5 Montrer que $\forall x \in A \qquad (1+x)^6 = x + 1 + x^4 + x^2$

6 En déduire que $\forall x \in A \qquad x^2 = x$

7 Montrer que A est commutatif. (Seuls les résultats du cours peuvent être admis et utulisés sans démenstration)

II Soient dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes $A = X^2 + X - 2$ et $B = X^2 + 2X + 1$

1 En utilisant l' algorithme d'Euclide, montrer que $pgcd(A, B) = 1$

2 En déduire $U, V \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$UA + VB = 1 \qquad avec \qquad d^\circ(U), d^\circ(V) \leq 1$$

3 Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction

$$F = \frac{X^6}{(X^2 - 2X + 1)(X^2 - 2X + 2)^2}$$

III Soit K un corps commutatif. Soit $m, n \in \mathbb{N}$ avec $m, n \geq 1$. Soit $A \in M_{m,n}(K)$ une matrice m lignes, n colonnes. ((m, n) s'appel la taille de A). Soit $B \in M_{n,m}(K)$.

1 Justifier que les matrices suivantes sont définies et donner leurs tailles

$$AB \qquad BA \qquad BAB$$

Pour une matrice carrée $M = (\alpha_{ij})$, on appel trace de M le scalair $\sum_i \alpha_{ii}$. On le note $tr(M)$

2 Montrer que $tr(AB) = tr(BA)$

3 En déduire que $tr((AB)^2) = tr((BA)^2)$ (Indication : $(AB)^2 = A(BAB)$)

4 Plus généralement montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$ $\qquad tr((AB)^k) = tr((BA)^k)$

5 Montrer que l'application $M \in M_p(K) \longrightarrow tr(M) \in K$ est linéaire.

Dans la suite on note $C = I - AB$ et $D = I' - BA$ (I, I' désignant les matrices identités respectivement de même taille que AB et BA)

6 Montrer que $tr(C) - tr(D) = m - n$

7 Plus généralement montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$ $(k \geq 1)$ $\qquad tr(C^k) - tr(D^k) = m - n$

On fixe

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8 Calculer AB et BA

9 Vérifier que $det(C) = det(D)$ (Justifier vos calculs)

IV Soit l'application $f \ : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow (x_3 + x_1, x_4, x_3 + x_1 + x_4)$$

1 Montrer que f est linéaire.

2 Soient B_1, B_2 les bases canoniques respectivement de $\mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^3$. Calculer $M_{B_1B_2}(f)$

3 Pour $v \in \mathbb{R}^4$ et $w \in \mathbb{R}^3$, écrire matrciellement la relation $f(v) = w$.

4 Donner une base et la dimension de $Ker(f)$.

5 Donner une base et la dimension de $Im(f)$.

6 Vérifier la relation liant $dim(Ker(f))$ et $dim(Im(f))$.