UNIVERSITE MOHAMED 1er
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique
Oujda

SMAI Semestre 2
Algèbre 2
Contrôl Final
Année 2010/2011
Durée 3 heures

Session ordinaire du printemps 2011

`http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2`
mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III, IV et V sont indépendants

I Décomposer en éléments simples. dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction :

$$F = \frac{X^6}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$$

II On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\mathscr{S} = ((1,2,1),(-1,0,1),(2,6,4),(-1,2,3))$$

1 Donner le rang de $\mathscr{S}$ (Justifier votre réponse)

2 Donner une base de $vect(\mathscr{S})$

3 Donner la décomposition des autres éléments de $\mathscr{S}$ dans la base ci-dessus.

III Soit K un corps commutatif et E le sous ensemble de $K[X]$ formé des polynômes de degré ≤ 3

$$E = \left\{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in K\right\}$$

1 Montrer que E est un sous espace vectoriel de $K[X]$

2 Montrer que $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de E
Soit

$$\begin{aligned} f\ &: E \longrightarrow K^2 \\ P &\longrightarrow (P(0), P(1)) \end{aligned}$$

3 Montrer que f est linéaire.

4 Justifier que la matrice de f dans les bases $B = (1, X, X^2, X^3)$ et $B' = ((1,0),(0,1))$ est

$$M_{BB'}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

5 Soit $P \in E$, donner au moyen de $M_{BB'}(f)$ l'écriture explicite de $f(P)$

6 Donner une base de $ker(f)$

7 En déduire que si $P \in ker(f)$ alors P est de la forme $X(X-1)(aX+b)$

8 Donner au moyen de $M_{BB'}(f)$, un générateur ensuite une base de $Im(f)$

9 Vérifier la formule liant $dim(ker(f))$ et $dim(Im(f))$

10 Soit $B_2 = (1, X, X(X-1), X(X-1)^2)$. Montrer que B_2 est une base de E

11 Ecrire la matrice de f dans les bases B_2 et B'

12 Donner la matrice de passage de B à B_2

13 Vérifier la formule de changement de base entre $M_{BB'}(f)$ et $M_{B_2B'}(f)$

IV Soit dans $M_4(\mathbb{R})$ la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1 Justifier que le polynôme caractéristique de A est $P_A = X^4$

2 Donner les valeurs propres de A

3 Donner les vecteurs propres de A

4 A est elle diagonalisable ? (justifier votre réponse).

V Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E. On suppose que

$$E = ker(f) + ker(g) \qquad et \qquad E = Im(f) + Im(g)$$

1 Montrer que

$$dim(E) \leq dim(ker(f)) + dim(ker(g)) \qquad (1)$$

et

$$dim(E) \leq dim(Im(f)) + dim(Im(g)) \qquad (2)$$

2 En déduire que

$$2dim(E) \leq (dim(ker(f)) + dim(ker(g))) + (dim(Im(f)) + dim(Im(g))) \qquad (3)$$

3 Montrer que (3) est une égalité

4 En déduire que (1) et (2) sont des égalités

5 Montrer que les sommes $ker(f) + ker(g)$ et $Im(f) + Im(g)$ sont directes