UNIVERSITE MOHAMED 1er
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique
Oujda

SMAI Semestre 2
Algèbre 2
Contrôl Final
Année 2010/2011
Durée 3 heures

Session ordinaire du printemps 2011

`http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2`
mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III, IV et V sont indépendants

solution

I Décomposer en éléments simples. dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction :

$$F = \frac{X^6}{(X-1)^2(X^2+1)^2}$$

Réponse :

$$F = Q + \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{cX+d}{X^2+1} + \frac{eX+f}{(X^2+1)^2}$$

- Q quotient de la division euclidiène de X^6 par $(X-1)^2(X^2+1)^2 \longrightarrow Q = 1$
- Pour calculer a, b on pose $h = X - 1$ et on effectue un développement limité à l'ordre 1 de h^2F

$$h^2F = \frac{X^6}{(X^2+1)^2} \quad \Big|_{X=h+1} = \frac{(h+1)^6}{((h+1)^2+1)^2}$$

$$= \frac{1+6h}{4(1+2h)} + O(h^2) = 1/4 + h + O(h^2)$$

par suite

$$F = \frac{1}{4(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} + \dots$$

- Pour calculer c, d, e, f on pose $h = X^2 + 1$, on a

$$h^2F = \frac{X^6}{(X-1)^2} \quad \Big|_{X^2=h-1} = \frac{(h-1)^3}{h-2X} = \frac{-1+3h+O(h^2)}{h-2X} \qquad (*)$$

$$= \frac{(-1+3h)(h+2X)+O(h^2)}{(h-2X)(h+2X)} = \frac{-2X+(6X-1)h+O(h^2)}{h^2-4X^2}$$

$$= \frac{-2X+(6X-1)h+O(h^2)}{4-4h+O(h^2)}$$

$$= -\frac{1}{2}X + \frac{1}{4}(4X-1)h + O(h^2)$$

par suite

$$F = \frac{-X}{2(X^2+1)^2} + \frac{-1+4X}{4(X^2+1)} + \dots$$

Finalement

$$F = 1 + \frac{1}{4(X-1)^2} + \frac{1}{X-1} + \frac{-X}{2(X^2+1)^2} + \frac{-1+4X}{4(X^2+1)}$$

Remarque : On peut aussi faire directement la division euclidiènne suivant les puissace croissance de h avec retenue, de $-1+3h$ par $-2X+h$, dans $(*)$, le pivot est $1/(-2X) = X/2 \qquad mod(h)$

$$\begin{array}{c|c}
-1+3h & -2X+h \\ \cline{2-2}
X^2+(-X/2)h = -1+(1-X/2)h & -X/2+(X+X^2/4)h = -X/2+(X-1/4)h \\ \cline{1-1}
(2+X/2)h &
\end{array}$$

Autre méthode par l'identité de Besout : On cherche U tel que $U(X-1)^2 = 1 + V(X^2+1) \longrightarrow U = X/2$, alors $eX+f$ est le reste de X^6U par $X^2+1 \longrightarrow eX+f = -X/2$, posons $X^6 - (X-1)^2(eX+f) = A_2(X^2+1) \longrightarrow A_2 = X^4 - X^2 + \frac{1}{2}X$, alors $cX+d$ est le reste de A_2U par $X^2+1 \longrightarrow cX+d = X-1/4$

Autre méthode on dévellope

$$F_1 = \frac{X^3}{(X-1)(X^2+1)} \qquad \longrightarrow$$

$$F_1 = 1 + \frac{1}{2(X-1)} + \frac{X-1}{2(X^2+1)}$$

et on a

$$F = F_1^2 = 1 + \frac{1}{4(X-1)^2} + \frac{(X-1)^2}{4(X^2+1)^2} + \frac{1}{X-1} + \frac{X-1}{X^2+1} + \frac{1}{2(X^2+1)}$$

Le seul élément non simple est

$$\frac{(X-1)^2}{4(X^2+1)^2} = \frac{h-2X}{4h^2} = \frac{1}{4h} - \frac{X}{2h^2}$$

D'où

$$F = 1 + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{4(X-1)^2} + \frac{X-1}{X^2+1} + \frac{1}{2(X^2+1)} + \frac{1}{4(X^2+1)} - \frac{X}{2(X^2+1)^2}$$

$$= 1 + \frac{1}{X-1} + \frac{1}{4(X-1)^2} + \frac{4X-1}{4(X^2+1)} - \frac{X}{2(X^2+1)^2}$$

Autre méthode par identification, on multplie F par $(X-1)^2(X^2+1)^2$ et on identifie les coefiçients. $\square$

II On considère dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ le système :

$$\mathscr{S} = ((1,2,1),(-1,0,1),(2,6,4),(-1,2,3))$$

1 Donner le rang de $\mathscr{S}$ (Justifier votre réponse)

On résoud le système

$$x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v4 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 - 2x_3 + x_4 \qquad (*)(1) \\ 2(x_2 - 2x_3 + x_4) + 6x_3 + 2x_4 = 0 \\ (x_2 - 2x_3 + x_4) + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (*)(1) \\ 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} (1) \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 \qquad (*)(2) \end{cases}$$

2 inconnues éliminées $\longrightarrow$ le rang = 2 $\square$

Autre méthode : (v_1, v_2) est libre car $1/-1 \neq 2/0$. Donc le rang est aumoin 2, on a (calcul))$v_3 = 3v_1 + v_2$ et $v_4 = v_1 + 2v_2$ donc le rang =2 $\square$

Autre méthode : On applique l'algorithme de complétition à savoir (rappel) : E espace vectoriel, $L \subset E$ libre , $G \subset E$ générateur :

i. Si $G = \emptyset$ terminer L est une base
ii. Soit $x \in G$, $G = G \setminus \{x\}$
iii. Si $x \notin vec(L)$ alors $L = L \cup \{x\}$
iv. Aller à i.

Ici $E = vect(\mathscr{S})$, $L = \emptyset$ et $G = \mathscr{S}$

i. $G \neq \emptyset$
ii. $x = v_1 \longrightarrow G = (v_2, v_3, v_4)$
ii. $x \notin vect(L) = \{0\} \longrightarrow L = (v_1)$
i. $G \neq \emptyset$
ii. $x = v_2 \longrightarrow G = (v_3, v_4)$
ii. $x \notin vect(L) \longrightarrow L = (v_1, v_2)$
i. $G \neq \emptyset$
ii. $x = v_3 \longrightarrow G = (v_4)$
ii. $x \in vect(L) \longrightarrow L = (v_1, v_2)$
i. $G \neq \emptyset$
ii. $x = v_4 \longrightarrow G = \emptyset$
ii. $x \in vect(L) \longrightarrow L = (v_1, v_2)$
i. $G = \emptyset \longrightarrow L = (v_1, v_2)$ est une base $\square$

Autre méthode : On ramène à une matrice échelonnée la matrice du système (v_1, v_2, v_3, v_4)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 6 & 2 \\ 1 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow rang = 2 \qquad \square$$

2 Donner une base de $vect(\mathscr{S})$
Réponse : Par la première méthode x_1, x_2 inconnues éliminées $\longrightarrow (v_1, v_2)$ base. Par la deuxième et la trisième méthode aussi (v_1, v_2) base. $\square$

3 Donner la décomposition des autres éléments de $\mathscr{S}$ dans la base ci-dessus.
Réponse : Par la première méthode, la solution du système linéaire est :

$$\{(-3x_3 - x_4, -x_3 - 2x_4, x_3, x_4) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Soit

$$\begin{array}{ccll} & & -v_3 & -v_4 \\ x_1 & = & -3x_3 & -x_4 \\ x_2 & = - & -x_3 & -2x_4, \end{array}$$

En lisant verticalement la solution $\longrightarrow v_3 = 3v_1 + v_2 \qquad v_4 = v_1 + 2v_2$ $\square$

Autre possibilitées :

$$(v_1, v_3) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_2 = -3v_1 + v_3 \\ v_4 = -5v_1 + 2v_3 \end{cases}$$

$$(v_1, v_4) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_2 = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_4 \\ \\ v_3 = \frac{5}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_4 \end{cases}$$

$$(v_2, v_3) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_1 = -\frac{1}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3 \\ \\ v_4 = \frac{5}{3}v_2 + \frac{1}{3}v_3 \end{cases}$$

$$(v_2, v_4) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_1 = -2v_2 + v_4 \\ \\ v_3 = -5v_2 + 3v_4 \end{cases}$$

$$(v_3, v_4) \text{ base} \longrightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{2}{5}v_3 - \frac{1}{5}v_4 \\ \\ v_2 = -\frac{1}{5}v_3 + \frac{3}{5}v_4 \end{cases} \qquad \square$$

III Soit K un corps commutatif et E le sous ensemble de $K[X]$ formé des polynômes de degré ≤ 3

$$E = \left\{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in K\right\}$$

1 Montrer que E est un sous espace vectoriel de $K\left[X\right]$

Réponse :

- Le polynôme 0 appartient à E car $0 = 0 + 0X + 0X^2 + 0X^3 \longrightarrow E \neq \emptyset$
- Si $P, Q \in E$ et $\lambda \in K$ écrivons $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3$ et $Q = b_0 + b_1X + b_2X^2 + b_3X^3$ alors $P + \lambda Q = (a_0 + \lambda b_0) + (a_1 + \lambda b_1)X + (a_2 + \lambda b_2)X^2 + (a_3 + \lambda b_3)X^3$ donc $P + \lambda Q \in E$, autre méthode :

$$d^\circ(P + \lambda Q) \leq max(d^\circ(P), d^\circ(\lambda Q)) \leq 3 \qquad \square$$

2 Montrer que $(1, X, X^2, X^3)$ est une base de E

Réponse : Par construction c'est un générateur et il est libre par définition de $K\left[X\right]$ $\quad \square$

$$f \; : E \longrightarrow K^2$$
$$P \longrightarrow (P(0), P(1))$$

3 Montrer que f est linéaire.
Réponse : Soient $P, Q \in E$ et $\lambda \in K$

$$f(P+\lambda Q) = ((P+\lambda Q)(0), (P+\lambda Q)(1)) = (P(0)+\lambda Q(0), P(1)+\lambda Q(1))$$

$$= (P(0), P(1)) + \lambda(Q(0), Q(1)) = f(P) + \lambda f(Q) \qquad \square$$

Autre méthode au moyen de l'écriture explicite de

$$f(P) = (a_0, a_0 + a_1 + a_2 + a_3) \qquad \square$$

4 Justifier que la matrice de f dans les bases $B = (1, X, X^2, X^3)$ et $B' = ((1,0),(0,1))$ est

$$M_{BB'}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Réponse : On a :

- $f(1) = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$
- $f(X) = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1)$
- $f(X^2) = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1)$
- $f(X^3) = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1) \qquad \square$

5 Soit $P \in E$, donner au moyen de $M_{BB'}(f)$ l'écriture explicite de $f(P)$
Réponse : $M_{B'}(f(P)) = M_{BB'}(f)M_B(P))$, soit :

$$\begin{pmatrix} P(0) \\ P(1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \end{pmatrix} \qquad \square$$

6 Donner une base de $ker(f)$
Réponse : Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in E$

$$P \in ker(f) \iff f(P) = (0,0) \iff \left\{ \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} *(1) \\ a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} *(1) \\ a_1 = -a_2 - a_3 \qquad *(2) \end{array} \right.$$

Donc

$$ker(f) = \left\{ (-a_2 - a_3)X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_2, a_3 \in K \right\} \qquad \square$$

7 En déduire que si $P \in ker(f)$ alors P est de la forme $X(X-1)(aX+b)$

Réponse : $(-a_2 - a_3)X + a_2X^2 + a_3X^3 = a_2(X^2 - X) + a_3(X^3 - X^2) = (a_2 + a_3X)(X^2 - X)$ $\square$

8 Donner au moyen de $M_{BB'}(f)$, un générateur ensuite une base de $Im(f)$

Réponse : Un générateur de $Im(f)$ est $\mathscr{S} = (f(1), f(X), f(X^2), f(X^3))$ et la matrice de $\mathscr{S}$ dans B est

$$M_B(\mathscr{S}) = M_{BB'}(f)$$

On a $(1,1),(0,1)$ libre et $(0,1) \in vect((1,1),(0,1))$ donc une base des colonnes de $M_B(\mathscr{S})$ est $(1,1),(0,1)$, donc une base de $vect(\mathscr{S})$ est $(f(1), f(X))$ soit une base de $Im(f)$ est $(f(1), f(X))$ $\square$

9 Vérifier la formule liant $dim(ker(f))$ et $dim(Im(f))$

Réponse : $dim(E) = 4 = 2 + 2 = dim(ker(f)) + dim(Im(f))$ $\square$

10 Soit $B_2 = (1, X, X(X-1), X(X-1)^2)$. Montrer que B_2 est une base de E

Réponse : Comme $|B_2| = 4 = dim(E)$ il suffit de montrer que B_2 est libre, soit une relation :

$$\lambda_0.1 + \lambda_1 X + \lambda_2 X(X-1) + \lambda_3 X(X-1)^2 = 0$$

- Avec $X = 0 \longrightarrow \lambda_0 = 0$
- Avec $X = 1 \longrightarrow \lambda_1 = 0$
- Il reste $\lambda_2 X(X-1) + \lambda_3 X(X-1)^2 = 0$ donc en simplifiant par $X(X-1)$ il reste $\lambda_2 + \lambda_3 X = 0 \longrightarrow \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ $\square$

11 Ecrire la matrice de f dans les bases B_2 et B'

Réponse : On a :

- $f(1) = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$
- $f(X) = (0,1) = 0(1,0) + 1(0,1)$
- $f(X(X-1)) = (0,0) = 0(1,0) + 0(0,1)$
- $f(X(X-1)^2) = (0,1) = 0(1,0) + 0(0,1)$

Donc

$$M_{B_2B'}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \square$$

12 Donner la matrice de passage de B à B_2

Réponse :

- $1 = 1.0 + 0X + 0X^2 + 0X^3$
- $X = 0.0 + 1X + 0X^2 + 0X^3$
- $X(X-1) = 0.0 + (-1)X + 1X^2 + 0X^3$
- $X(X-1)^2 = X - 2X^2 + X^3 = 0.0 + 1X + (-2)X^2 + 1X^3$

donc :

$$P_{BB_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square$$

13 Vérifier la formule de changement de base entre $M_{BB'}(f)$ et $M_{B_2B'}(f)$

Réponse :

$$M_{B_2B'} = P^{-1}_{B'B'} M_{BB'}(f) P_{BB_2} = M_{BB'}(f) P_{BB_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square$$

IV Soit dans $M_4(\mathbb{R})$ la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 5 & 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1 Justifier que le polynôme caractéristique de A est $P_A = X^4$

Réponse :

$$P_A = det(A - X_{I_4}) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1-X & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2-X & -2 \\ 5 & 4 & 2 & -2-X \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ 1 & -1-X \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2-X & -2 \\ 2 & -2-X \end{vmatrix}$$

$$= (1-(1-X^2))(4-(4-X^2)) = X^4 \qquad \square$$

2 Donner les valeurs propres de A

Réponse :

$$sp(A) = \{0\} \qquad \square$$

3 Donner les vecteurs propres de A

Réponse :

$$(x,y,z,t) \in E_0 \Longleftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 0 \\ x + y + 2z - 2t = 0 \\ 5x + 4y + 2z - 2t = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y & *(1) \\ 0 = 0 \\ 2y + 2z - 2t = 0 \\ 9y + 2z - 2t = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} *(1) \\ y = t - z & *(2) \\ z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} *(1) \\ *(2) \\ z = t & *(3) \end{cases}$$

Donc

$$E_0 = \{(0,0,t,t) \mid t \in K\} \qquad \square$$

4 A est elle diagonalisable ? (justifier votre réponse).
Réponse : A n'est pas diagonalisable car $dim(E_0) = 1 \neq m_0 = 4$ $\square$

V Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ des endomorphismes de E. On suppose que

$$E = ker(f) + ker(g) \qquad et \qquad E = Im(f) + Im(g)$$

1 Montrer que

$$dim(E) \leq dim(ker(f)) + dim(ker(g)) \qquad (1)$$

et

$$dim(E) \leq dim(Im(f)) + dim(Im(g)) \qquad (2)$$

Réponse : D'après le cours $dim(F + F') \leq dim(F) + dim(F')$, donc :

$$dim(E) = dim(ker(f) + ker(g)) \leq dim(ker(f)) + dim(ker(g))$$

$$dim(E) = dim(Im(f) + Im(g)) \leq dim(Im(f)) + dim(Im(g)) \qquad \square$$

2 En déduire que

$$2dim(E) \leq (dim(ker(f)) + dim(ker(g))) + (dim(Im(f)) + dim(Im(g))) \qquad (3)$$

Réponse : On fait la somme membre à membre des deux inégalités $\square$

3 Montrer que (3) est une égalité
Réponse : (3) est une églité car

$$(dim(ker(f)) + dim(ker(g))) + (dim(Im(f)) + dim(Im(g)))$$

$$= (dim(ker(f)) + dim(Im(f))) + (dim(ker(g)) + dim(Im(g))) = dim(E) + dim(E) \qquad \square$$

4 En déduire que (1) et (2) sont des égalités
Réponse : Si (1) ou (2) est stricte (3) serait stricte $\square$

5 Montrer que les sommes $ker(f) + ker(g)$ et $Im(f) + Im(g)$ sont directes
Réponse : D'après le cours si $dim(F), dim(F')$ finies et $dim(F + F') = dim(F) + dim(F')$ alors $F + F'$ est directe $\square$