Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia

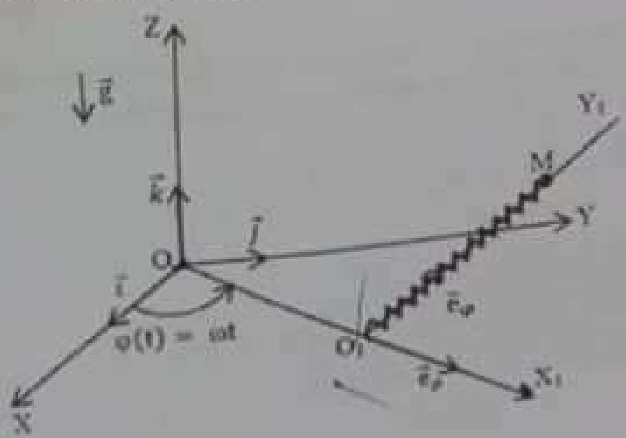
Filière SMPC-B – Semestre 1 - Module : mécanique du point materiel

Contrôle Final- Session Automne 2021 - Durée : 1h 30 mn

Consignes :

Vous avez droit à une seule copie. Lire attentivement l'énoncé de la question avant de NOIRCIR (■) la bonne réponse.
Attention : L'utilisation du Blanco est interdite.

PROBLEME:
Soient $R(O,X,Y,Z)$ un référentiel fixe supposé galiléen auquel est attachée la base $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et $R_1(O_1,X_1,Y_1,Z_1)$ le référentiel relatif muni de la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$. Le point O_1 se déplace sur (OX_1) à la vitesse $\vec{V}(O_1/R) = v_0\vec{e}_\rho$ où v_0 est une constante positive. Une tige (T) d'extrémité O_1 fixée orthogonalement sur l'axe (OX_1), reste constamment dans le plan horizontal (XOY) et elle est en rotation uniforme dans ce même plan. Soit M un anneau de masse m assimilé à un point matériel, se déplace sans frottement sur la tige (T) et repéré par ses coordonnées $\rho(t)$ et $\varphi(t)$ tel que : $\overrightarrow{O_1M} = \rho\vec{e}_\varphi$ et $\varphi(t) = (\vec{i}\,\widehat{,}\,\vec{e}_\rho) = \omega t$, ω est une constante positive. Le point M est accroché à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. La deuxième extrémité du ressort est liée au point O_1 (voir figure). L'accélération de la pesanteur est $\vec{g} = -g\vec{k}$. Dans la suite du problème, on exprime toutes les grandeurs vectorielles dans la base $(\vec{e}_\rho,\vec{e}_\varphi,\vec{k})$



Question 1 Le vecteur rotation de R_1 par rapport à R s'exprime par :

- [A] $\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\vec{e}_\rho$
- [B] $\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega t\vec{k}$
- [C] $\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\vec{k}$
- [D] $\vec{\Omega}(R_1/R) = \vec{0}$

Question 2 La vitesse relative $\vec{V}_r(M)$ s'exprime par :

- [A] $\vec{V}_r(M) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho$
- [B] $\vec{V}_r(M) = \dot{\rho}\vec{e}_\varphi$ ✗
- [C] $\vec{V}_r(M) = \dot{\rho}\vec{e}_\varphi - \rho\omega\vec{e}_\rho$
- [D] $\vec{V}_r(M) = \dot{\rho}\vec{e}_\varphi + \rho\omega\vec{e}_\rho$

Question 3 La vitesse d'entrainement $\vec{V}_e(M)$ s'exprime par :

- [A] $\vec{V}_e(M) = v_0\omega\vec{e}_\varphi + \rho\omega\vec{e}_\rho$
- [B] $\vec{V}_e(M) = v_0\vec{e}_\rho$
- [C] $\vec{V}_e(M) = (v_0 - \rho\omega)\vec{e}_\rho$
- [D] $\vec{V}_e(M) = v_0t\vec{e}_\varphi - \rho\omega\vec{e}_\rho$

Question 4 L'accélération relative $\vec{\gamma}_r(M)$ s'exprime par :

- [A] $\vec{\gamma}_r(M) = \ddot{\rho}\vec{e}_\varphi$
- [B] $\vec{\gamma}_r(M) = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho - \rho\omega\vec{e}_\varphi$
- [C] $\vec{\gamma}_r(M) = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi$
- [D] $\vec{\gamma}_r(M) = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho$

Question 5 L'accélération d'entrainement $\vec{\gamma}_e(M)$ s'exprime par :

A $\vec{\gamma}_e(M) = (v_0\omega - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho$
B $\vec{\gamma}_e(M) = (v_0\omega - \rho\omega^2)\vec{e}_\varphi$
C $\vec{\gamma}_e(M) = v_0\vec{e}_\rho - \rho\omega^2\vec{e}_\varphi$
D $\vec{\gamma}_e(M) = v_0\omega\vec{e}_\rho - \dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi$

Question 6 L'accélération de coriolis $\vec{\gamma}_c(M)$ s'exprime par :

A $\vec{\gamma}_c(M) = 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi$
B $\vec{\gamma}_c(M) = 2\rho\omega^2\vec{e}_\rho$
C $\vec{\gamma}_c(M) = 2\rho\omega^2\vec{e}_\varphi$
D $\vec{\gamma}_c(M) = -2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\rho$

Question 7 Le referentiel R_1 est-il galiléen ?

A Oui car $\vec{\Omega}(R_1/R)$est constante
B Oui car $\vec{V}(R_1/R)$ est constante
C Non car $\vec{\Omega}(R_1/R) \neq \vec{0}$ ∝
D Non car $\vec{V}(R_1/R)$ est constante

Question 8 La reaction $\vec{R}$ s'exprime par :

A $\vec{R} = R_z\vec{k}$
B $\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{k}$
C $\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho$
D $\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_z\vec{k}$ ∝

Question 9 La résultante $\vec{F}$ des forces appliquées à M dans R_1 s'exprime par :

A $\vec{F} = \vec{R} + \vec{P} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$
B $\vec{F} = \vec{P} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$
C $\vec{F} = \vec{R} + \vec{F}_r + \vec{P}$
D $\vec{F} = \vec{R} + \vec{F}_r + \vec{P} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$ ∝

Question 10 En projetant le PFD suivant $\vec{e}_\varphi$, l'équation différentielle du mouvement s'écrit :

A $\ddot{\rho} + (\frac{k}{m} - \omega^2)\rho = \frac{k}{m}l_0$
B $\ddot{\rho} + (\frac{k}{m} - \omega^2)\rho = \frac{k}{m}l_0 - \omega v_0$
C $\ddot{\rho} + (\frac{k}{m} + \omega^2)\rho = -\omega v_0$
D $\ddot{\rho} + (\frac{k}{m} - \omega^2)\rho = \vec{0}$

Question 11 En projetant le PFD suivant $\vec{k}$, la composante R_z de la réaction est :

A $R_z = mg$
B $R_z = m\rho\omega^2$
C $R_z = -mg$
D $R_z = 0$

Question 12 En projetant le PFD suivant $\vec{e}_\rho$, la composante R_ρ de la réaction est :

A $R_\rho = -2m\dot{\rho}\omega$ ∝
B $R_\rho = -mg$
C $R_\rho = 0$
D $R_\rho = mg - 2m\dot{\rho}\omega$

Question 13 Montrer que le moment cinétique en O_1 de M dans R_1 s'écrit :

A $\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1) = m\rho\dot{\rho}\vec{e}_\varphi$
B $\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1) = m\rho\dot{\rho}\vec{k}$
C $\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1) = m\rho\dot{\rho}\vec{e}_\rho$
∝ D $\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1) = \vec{0}$

Question 14 Montrer que le moment en O_1 de la résultante des forces appliquées à M dans R_1 s'écrit :

A $\vec{\mathcal{M}}_{O_1}(\vec{F}/R_1) = \rho[(R_z - mg)\vec{e}_\varphi - (R_\rho + 2m\dot{\rho}\omega)\vec{k}]$
B $\vec{\mathcal{M}}_{O_1}(\vec{F}/R_1) = \vec{0}$
C $\vec{\mathcal{M}}_{O_1}(\vec{F}/R_1) = \rho[-(R_\rho + 2m\dot{\rho}\omega)\vec{k}]$
D $\vec{\mathcal{M}}_{O_1}(\vec{F}/R_1) = \rho[(R_z - mg)\vec{e}_\rho$

Question 15 En appliquant le théorème du moment cinétique, on montre que :

- [A] $\rho[(R_z - mg)\vec{e}_\rho] = \vec{0}$
- [B] $\rho[-(R_\rho + 2m\dot{\rho}\omega)\vec{k}] = m\rho\ddot{\rho}\vec{k}$
- [C] $\rho[(R_z - mg)\vec{e}_\rho - (R_\rho + 2m\dot{\rho}\omega)\vec{k}] = m\rho\dot{\rho}\vec{e}_\varphi$
- [D] $\rho[(R_z - mg)\vec{e}_\rho - (R_\rho + 2m\dot{\rho}\omega)\vec{k}] = \vec{0}$

Question 16 L'énergie cinétique $E_c(M/R_1)$ et sa dérivée $\frac{dE_c(M/R_1)}{dt}$ sont données par :

- [A] $E_c(M/R_1) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2$ et $\frac{dE_c(M/R_1)}{dt} = m\rho\dot{\rho}$
- [B] $E_c(M/R_1) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2$ et $\frac{dE_c(M/R_1)}{dt} = m\ddot{\rho}\dot{\rho}$
- [C] $E_c(M/R_1) = \frac{1}{2}m\rho^2$ et $\frac{dE_c(M/R_1)}{dt} = m\rho\dot{\rho}$
- [D] $E_c(M/R_1) = 0$ et $\frac{dE_c(M/R_1)}{dt} = 0$

Question 17 La puissance de la résultante des forces appliquées sur M dans R_1 s'exprime par :

- [A] $\mathscr{P}(\vec{F}/R_1) = 0$
- [B] $\mathscr{P}(\vec{F}/R_1) = [-k(\rho - l_0)]\dot{\rho}$
- [C] $\mathscr{P}(\vec{F}/R_1) = [-m(v_0\omega - \rho\omega^2)]\dot{\rho}$
- [D] $\mathscr{P}(\vec{F}/R_1) = [-k(\rho - l_0) - m(v_0\omega - \rho\omega^2)]\dot{\rho}$

Question 18 En appliquant le théorème de l'énergie cinétique de M dans R_1, on montre que :

- [A] $m\ddot{\rho}\dot{\rho} = 0$
- [B] $[-k(\rho - l_0) - m(v_0\omega - \rho\omega^2)] = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2$
- [C] $[-m(v_0\omega - \rho\omega^2)]\dot{\rho} = m\rho\dot{\rho}$
- [D] $[-k(\rho - l_0) - m(v_0\omega - \rho\omega^2)]\dot{\rho} = m\ddot{\rho}\dot{\rho}$

Question 19 L'énergie potentielle de M dans R_1 s'exprime par :

- [A] $E_p(M/R_1) = \frac{1}{2}k(\rho - l_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(\rho - \frac{v_0}{\omega})^2 + cte$
- [B] $E_p(M/R_1) = \frac{1}{2}k(\rho - l_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + cte$
- [C] $E_p(M/R_1) = \frac{1}{2}k(\rho - l_0)^2 + mv_0\omega\rho$
- [D] $E_p(M/R_1) = \frac{1}{2}k(\rho - l_0)^2 + mg\rho + cte$

Question 20 L'énergie mécanique de M dans R_1 s'exprime par :

- [A] $E_m(M/R_1) = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}k(\rho - l_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(\rho - \frac{v_0}{\omega})^2 + cte$
- [B] $E_m(M/R_1) = \frac{1}{2}k(\rho - l_0)^2 + mg\rho + \frac{1}{2}m\rho^2 + cte$
- [C] $E_m(M/R_1) = \frac{1}{2}k(\rho - l_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2\rho^2 + \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2$
- [D] $E_m(M/R_1) = \frac{1}{2}k(\rho - l_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2(\rho - \frac{v_0}{\omega})^2$

Question 21 L'énergie mécanique de M dans R_1 est-elle conservée ?

- [A] Oui car les forces non conservatives ne travaillent pas
- [B] Oui car $\vec{R}$ ne travaille pas
- [C] Non car $\vec{P}$ et $\vec{R}$ ne travaillent pas
- [D] Non car les forces non conservatives travaillent

Question 22 La conservation de l'énergie mécanique donne :

- [A] $\dot{\rho}[m\ddot{\rho} + k(\rho - l_0) - m\omega^2\rho] = cte$
- [B] $\dot{\rho}[m\ddot{\rho} + k(\rho - l_0) + mv_0\omega - m\omega^2\rho] = 0$
- [C] $\dot{\rho}[m\dot{\rho} + k(\rho - l_0) + mv_0\omega] = 0$
- [D] $\dot{\rho}[m\dot{\rho} - m\omega^2\rho] = 0$

uestion 23 La position d'équilibre est :

A $\rho = \dfrac{\frac{k}{m} l_0 - \omega v_0}{\frac{k}{m} - \omega^2}$

B $\rho = \dfrac{-\omega v_0}{\frac{k}{m} - \omega^2}$

C $\rho = \dfrac{\frac{k}{m} l_0}{\frac{k}{m} - \omega^2}$

D *N'existe pas*

Question 24 Dans le cas ou $\frac{k}{m} > \omega^2$, cette position d'équilibre est :

A *Intable*

B *Stable*

C *Indifférent*

D *Autre*