

Planche n° 24. Structures : corrigé

Exercice n° 1

1) \bullet $*$ est une loi interne dans \mathbb{R}^2 .

\bullet Soit $(x, x', y, y', z, z') \in \mathbb{R}^6$.

$$\begin{aligned} ((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') &= (x + x', ye^{x'} + y'e^{-x}) * (x'', y'') = (x + x' + x'', (ye^{x'} + y'e^{-x})e^{x''} + y''e^{-x-x'}) \\ &= (x + x' + x'', ye^{x'+x''} + y'e^{-x+x''} + y''e^{-x-x'}), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (x, y) * ((x', y') * (x'', y'')) &= (x, y) * (x' + x'', y'e^{x''} + y''e^{-x'}) = (x + x' + x'', ye^{x'+x''} + (y'e^{x''} + y''e^{-x'})e^{-x}) \\ &= (x + x' + x'', ye^{x'+x''} + y'e^{-x+x''} + y''e^{-x-x'}), \end{aligned}$$

Donc, pour tout $((x, y), (x', y'), (x'', y'')) \in (\mathbb{R}^2)^3$, $((x, y) * (x', y')) * (x'', y'') = (x, y) * ((x', y') * (x'', y''))$.

\bullet Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) * (0, 0) = (x + 0, ye^0 + 0e^{-x}) = (x, y),$$

et

$$(0, 0) * (x, y) = (0 + x, 0e^x + ye^{-0}) = (x, y).$$

Donc, $*$ admet un élément neutre à savoir $(0, 0)$.

\bullet Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(x, y) * (-x, -y) = (x - x, ye^{-x} - ye^{-x}) = (0, 0),$$

et

$$(-x, -y) * (x, y) = (-x + x, -ye^x + ye^x) = (0, 0).$$

Donc, tout élément (x, y) de \mathbb{R}^2 admet un symétrique pour $*$ dans \mathbb{R}^2 à savoir $(-x, -y)$.

\bullet $(1, 0) * (0, 1) = (1, e-1)$ et $(0, 1) * (1, 0) = (1, e)$. Donc $(1, 0) * (0, 1) \neq (0, 1) * (1, 0)$. La loi $*$ n'est donc pas commutative.

On a montré que

$$\boxed{(\mathbb{R}^2, *) \text{ est un groupe non abélien.}}$$

2) Soit f une fonction dérivable sur \mathbb{R} puis $G = \{(x, f(x)), x \in \mathbb{R}\}$. Soit $(x, x') \in \mathbb{R}^2$.

$$(x, f(x)) * (x', f(x')) = (x + x', f(x)e^{x'} + f(x')e^{-x}).$$

Si G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, *)$, on doit avoir $f(x + x') = f(x)e^{x'} + f(x')e^{-x}$. Pour $x = x' = 0$, on obtient $f(0) = 0$. Ensuite, pour tout réel x et tout réel non nul h

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{h} (f(x)(e^h - 1) + f(h)e^{-x}).$$

Puisque f est dérivable sur \mathbb{R} , quand h tend vers 0, on obtient

$$f'(x) = f(x) + f'(0)e^{-x}.$$

Donc, il existe un réel K tel que pour tout réel x , $f(x) = -\frac{f'(0)}{2}e^{-x} + Ke^x$. En dérivant, on obtient pour tout réel x , $f'(x) = \frac{f'(0)}{2}e^{-x} + Ke^x$ et pour $x = 0$ on obtient $K = \frac{f'(0)}{2}$. Finalement, pour tout réel x , $f(x) = \frac{f'(0)}{2}(e^x - e^{-x}) = f'(0) \operatorname{sh}(x)$.

On a montré que si f est solution, alors il existe un réel λ tel que pour tout réel x , $f(x) = \lambda \operatorname{sh}(x)$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un réel λ tel que pour tout réel x , $f(x) = \lambda \operatorname{sh}(x)$. Alors,

- $(0, 0) = (0, f(0)) \in G$.
- pour tout $(x, x') \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f(x)e^{x'} + f(x')e^{-x} &= \lambda \left(\operatorname{sh}(x)e^{x'} + \operatorname{sh}(x')e^{-x} \right) = \frac{\lambda}{2} \left((e^x - e^{-x})e^{x'} + (e^{x'} - e^{-x'})e^{-x} \right) \\ &= \frac{\lambda}{2} \left(e^{x+x'} - e^{-x-x'} \right) = \lambda \operatorname{sh}(x+x') \\ &= f(x+x'), \end{aligned}$$

et donc $(x, f(x)) * (x', f(x')) \in G$.

- pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(-x, -f(x)) = (-x, -\lambda \operatorname{sh}(x)) = (-x, \lambda \operatorname{sh}(-x)) = (-x, f(-x)),$$

et donc $(-x, -f(x)) \in G$.

Ceci montre que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, *)$. Finalement, G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, *)$ si et seulement si il existe un réel λ tel que pour tout réel x , $f(x) = \lambda x$.

Exercice n° 2

- Pour tout $(x, y) \in]-1, 1[$, $1 + xy \leq 1 - |xy| > 0$ et en particulier $1 + xy \neq 0$. Donc, pour tout $(x, y) \in]-1, 1[$, $x * y$ existe. Ensuite,

$$1 - \frac{x+y}{1+xy} = \frac{1-x-y+xy}{1+xy} = \frac{(1-x)(1-y)}{1+xy} > 0$$

et

$$\frac{x+y}{1+xy} - (-1) = \frac{1+x+y+xy}{1+xy} = \frac{(1+x)(1+y)}{1+xy} > 0.$$

Donc, pour tout $(x, y) \in]-1, 1[$, $x * y \in]-1, 1[$. Ainsi, $*$ est une loi interne dans $]-1, 1[$.

- Soit $(x, y) \in]-1, 1[$.

$$x * y = \frac{x+y}{1+xy} = \frac{x+y}{1+yx} = y * x.$$

Donc, la loi $*$ est commutative.

- Soit $(x, y, z) \in]-1, 1[$.

$$(x * y) * z = \frac{x+y}{1+xy} * z = \frac{\frac{x+y}{1+xy} + z}{1 + \frac{x+y}{1+xy}z} = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz}.$$

En échangeant les rôles de x , y et z , on obtient

$$x * (y * z) = (y * z) * x = \frac{x+y+z+xyz}{1+xy+xz+yz},$$

et finalement $(x * y) * z = x * (y * z)$. Donc, la loi $*$ est associative.

- Pour tout x de $]-1, 1[$, $x * 0 = \frac{x+0}{1+x \times 0} = x$. Donc $*$ admet un élément neutre à savoir 0 .
- Pour tout x de $]-1, 1[$, $-x \in]-1, 1[$ et $x * (-x) = \frac{x-x}{1-x^2} = 0$. Donc tout élément de $]-1, 1[$ admet un symétrique pour $*$ dans $]-1, 1[$.

On a montré que $(]-1, 1[, *)$ est un groupe commutatif.

Exercice n° 3

- 1) • $1 \in U$ car $|1| = 1$ et $U \subset \mathbb{C}^*$ car $0 \notin U$.

- Soient $(z, z') \in U^2$. Alors $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} = 1$. Donc $\frac{z}{z'} \in U$.

On a montré que U est un sous-groupe de (\mathbb{C}^*, \times) .

2) Soit $n \geq 2$.

- $1 \in U_n$ car 1^n et $U_n \subset U$ car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^n = 1 \Rightarrow |z|^n = 1 \Rightarrow |z| = 1$.
- Soit $(z, z') \in U_n^2$. $\left(\frac{z}{z'}\right)^n = \frac{z^n}{z'^n} = 1$ et donc $\frac{z}{z'} \in U_n$.

On a montré que U_n est un sous-groupe de (U, \times) .

Exercice n° 4

1) • $\mathcal{P}(E)$ n'est pas vide car $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$.

- Δ est une loi interne dans $\mathcal{P}(E)$.
- Δ est commutative et associative (voir planche n° 3, exercice n° 2, 3) et 4))
- $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \Delta \emptyset = A$ et donc Δ possède un élément neutre dans $\mathcal{P}(E)$ à savoir \emptyset .
- $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \Delta A = \emptyset$ et donc tout élément de $\mathcal{P}(E)$ possède un symétrique pour Δ dans $\mathcal{P}(E)$ à savoir lui-même.

On a montré que $(\mathcal{P}(E), \times)$ est un groupe commutatif.

2) • $(\mathcal{P}(E), \times)$ est un groupe commutatif.

- \cap est une loi interne dans $\mathcal{P}(E)$.
- \cap est commutative et associative.
- $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \cap E = A$ et donc \cap possède un élément neutre dans $\mathcal{P}(E)$ à savoir E .
- Soit $(A, B, C) \in (\mathcal{P}(E))^3$.

$$(A \Delta B) \cap C = ((A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) \cap C = (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$$

et

$$\begin{aligned}(A \cap C) \Delta (B \cap C) &= ((A \cap C) \cap \overline{(B \cap C)}) \cup (\overline{(A \cap C)} \cap (B \cap C)) \\ &= ((A \cap C) \cap \overline{(B \cup \overline{C})}) \cup (\overline{(A \cap C)} \cap (B \cap C)) \\ &= ((A \cap \overline{B} \cap C) \cup (A \cap C \cap \overline{C})) \cup (\overline{(A \cap B \cap C)} \cup (B \cap C \cap \overline{C})) \\ &= (A \cap \overline{B} \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)\end{aligned}$$

et donc $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$. Ainsi, \cap est distributive sur Δ .

On a montré que $(\mathcal{P}(E), \times, \cap)$ est un anneau (commutatif et unitaire).

Exercice n° 5

Posons $G = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Q}^2\}$.

Montrons que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

- $G \subset \mathbb{R}$ et $0 = 0 + 0 \times \sqrt{2} \in G$.
- Soit $(a, a', b, b') \in \mathbb{Q}^2$.

$$(a + b\sqrt{2}) - (a' + b'\sqrt{2}) = (a - a') + (b - b')\sqrt{2}$$

avec $a - a' \in \mathbb{Q}$ et $b - b' \in \mathbb{Q}$.

On a montré que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ et en particulier, $(G, +)$ est un groupe commutatif.

Montrons que $G \setminus \{0\}$ est un sous-groupe de (\mathbb{R}^*, \times) .

- Vérifions tout d'abord que si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors $a + b\sqrt{2} \neq 0$. Soit $(a, b) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $a + b\sqrt{2} = 0$. Si $b \neq 0$, on en déduit que $\sqrt{2} = -\frac{a}{b}$. Ceci est impossible car $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $-\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Donc, pour tous rationnels a et b , si $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $a = b = 0$. Par contraposition, pour tous rationnels a et b , si $(a, b) \neq (0, 0)$ alors $a + b\sqrt{2} \neq 0$.
- $1 = 1 + 0 \times \sqrt{2} \in G$.
- Soit $(a, a', b, b') \in \mathbb{Q}^4$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. D'après la remarque initiale, $a + b\sqrt{2} \neq 0$ et $a' + b'\sqrt{2} \neq 0$.

$$\frac{a + b\sqrt{2}}{a' + b'\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(a' - b'\sqrt{2})}{(a' + b'\sqrt{2})(a' - b'\sqrt{2})} = \frac{aa' - 2bb'}{a'^2 - 2b'^2} + \frac{ba' - ab'}{a'^2 - 2b'^2}\sqrt{2}.$$

Puisque $\frac{aa' - 2bb'}{a'^2 - 2b'^2}$ et $\frac{ba' - ab'}{a'^2 - 2b'^2}\sqrt{2}$ sont des rationnels, $\frac{a + b\sqrt{2}}{a' + b'\sqrt{2}} \in G$.

On a montré que $G \setminus \{0\}$ est un sous-groupe de (\mathbb{R}^*, \times) et en particulier, $(G \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe commutatif.

Finalement, $(G, +, \times)$ est un corps commutatif.

Exercice n° 6

1) Soient $a \in \mathbb{Z}$ puis $G = a\mathbb{Z}$.

- $0 = 0 \times a \in a\mathbb{Z}$ et $a\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$.
- Soit $(n, m) \in \mathbb{Z}^2$. $an - am = a(n - m) \in a\mathbb{Z}$.

Donc, $a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.

2) Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Si $G = \{0\}$, alors $G = 0\mathbb{Z}$ et G est de la forme voulue.

On suppose dorénavant que G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ non réduit à $\{0\}$. Il existe dans G un entier relatif non nul n_0 . Puisque G est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$, l'entier $-n_0$ est aussi dans G et l'un des deux entiers n_0 ou $-n_0$ est strictement positif. Soit alors $A = G \cap \mathbb{Z}_+^*$. A est une partie non vide de \mathbb{N} . A admet donc un plus petit élément que l'on note a . a est par définition le plus petit entier strictement positif de G .

Montrons alors que $G = a\mathbb{Z}$. Puisque a est dans G , G contient encore $a + a = 2a$, puis $a + a + a = 3a$ et plus généralement tous les na , $n \in \mathbb{N}^*$. G contient aussi les opposés de ces nombres, et puisque G contient également $0 = 0 \times a$, G contient finalement tous les na , $n \in \mathbb{Z}$. On a montré que $a\mathbb{Z} \subset G$.

Réciproquement, soit n un élément de G . La division euclidienne de n par a s'écrit $n = aq + r$ où q et r sont deux entiers relatifs tels que $0 \leq r < a$ (puisque a est un entier strictement positif, $a - 1$ est un entier positif).

Or, n est dans G et qa est dans G . Donc, $n - qa$ est dans $G \cap \llbracket 0, a - 1 \rrbracket = \{0\}$ (par définition de a) puis $n = qa \in a\mathbb{Z}$. On a ainsi montré l'inclusion contraire et donc $G = a\mathbb{Z}$.

Les sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ sont donc de la forme $a\mathbb{Z}$ où $a \in \mathbb{Z}$.

Exercice n° 7

1) Soit G un sous-groupe non nul de $(\mathbb{R}, +)$ ($\{0\} = 0\mathbb{Z}$ est du type voulu).

Il existe dans G un réel non nul x_0 . Puisque G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, le réel $-x_0$ est aussi dans G et l'un des deux réels x_0 ou $-x_0$ est strictement positif. Soit alors $A = G \cap]0, +\infty[$.

D'après ce qui précède, A est une partie non vide et minorée (par 0) de \mathbb{R} . A admet donc une borne inférieure que l'on note a .

1er cas. Si $a = 0$. Montrons dans ce cas que G est dense dans \mathbb{R} (c'est par exemple le cas de $(\mathbb{Q}, +)$).

Soient x un réel et ε un réel strictement positif.

Puisque $\inf A = \inf(G \cap]0, +\infty[) = 0$, il existe dans G un élément g tel que $0 < g < \varepsilon$. Puis il existe un entier relatif n tel que $ng \leq x - \varepsilon < (n + 1)g$ à savoir $n = E\left(\frac{x - \varepsilon}{g}\right)$.

Soit $y = (n + 1)g$. D'une part, y est dans G (si $n + 1 = 0$, $(n + 1)g = 0 \in G$, si $n + 1 > 0$, $(n + 1)g = g + g + \dots + G \in G$ et si $n + 1 < 0$, $(n + 1)g = -(-(n + 1)g) \in G$) et d'autre part

$$x - \varepsilon < (n + 1)g = ng + g < x - \varepsilon + \varepsilon = x.$$

On a montré que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in G / x - \varepsilon < y < x$ et donc G est dense dans \mathbb{R} .

2ème cas. Supposons $a > 0$. Montrons dans ce cas que $G = a\mathbb{Z}$.

Pour cela, montrons tout d'abord que a est dans G .

Mais si a n'est pas élément de G , par définition de a , il existe un réel x dans $G \cap]a, 2a[$ puis il existe un réel y dans $G \cap]a, x[$. Le réel $x - y$ est alors dans $G \cap]0, a[$ ce qui est impossible. Donc a est élément de G .

Montrons alors que $G = a\mathbb{Z}$. Puisque a est dans G , G contient encore $a + a = 2a$, puis $a + a + a = 3a$ et plus généralement tous les na , $n \in \mathbb{N}^*$. G contient aussi les opposés de ces nombres, et puisque G contient également $0 = 0 \times a$, G contient finalement tous les na , $n \in \mathbb{Z}$. On a montré que $a\mathbb{Z} \subset G$.

Réciproquement, soit x un élément de G et $n = E\left(\frac{x}{a}\right) \in \mathbb{Z}$. Alors, $n \leq \frac{x}{a} < n+1$ puis $0 \leq x - na < a$.

Or, x est dans G et na est dans G . Donc, $x - na$ est dans $G \cap]0, a[= \{0\}$, puis $x = na \in a\mathbb{Z}$. On a ainsi montré l'inclusion contraire et donc $G = a\mathbb{Z}$.

2) Soit $G = \{a + b\sqrt{2}, (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$. Montrons que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

- $G \subset \mathbb{R}$ et $0 = 0 + 0 \times \sqrt{2} \in G$.
- Soit $(a, a', b, b') \in \mathbb{Z}^4$.

$$(a + b\sqrt{2}) - (a' + b'\sqrt{2}) = (a - a') + (b - b')\sqrt{2},$$

avec $a - a' \in \mathbb{Z}$ et $b - b' \in \mathbb{Z}$. Donc $(a + b\sqrt{2}) - (a' + b'\sqrt{2}) \in G$.

On a montré que G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Maintenant, la formule du binôme de NEWTON montre que, pour chaque entier naturel n , $(\sqrt{2} - 1)^n \in G \cap]0, +\infty[$. Or, $0 < \sqrt{2} - 1 < 1$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{2} - 1)^n = 0$. Ceci montre que $\inf(G \cap]0, +\infty[) = 0$ et donc que G est dense dans \mathbb{R} .

3) a) Soit f une application de \mathbb{R} dans lui-même et $G_f = \{T \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)\}$. Montrons que G_f est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

- 0 est élément de G_f (et c'est même le seul élément de G_f si f n'est pas périodique) et donc $G \neq \emptyset$.
- De plus, si T et T' sont deux éléments de G alors, pour tout réel x ,

$$f(x + (T - T')) = f((x - T') + T) = f(x - T') = f(x - T' + T') = f(x),$$

et $T - T'$ est encore un élément de G .

On a montré que G_f est un sous groupe de $(\mathbb{R}, +)$. Le groupe des périodes d'une fonction est donc soit de la forme $a\mathbb{Z}$, $a \in \mathbb{R}$, soit dense dans \mathbb{R} .

b) Soit f une application de \mathbb{R} dans \mathbb{R} admettant 1 et $\sqrt{2}$ pour périodes. G_f contient encore tous les nombres de la forme $a + b\sqrt{2}$, $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ et est donc dense dans \mathbb{R} .

Montrons que si de plus f est continue sur \mathbb{R} , f est constante.

Soit x un réel quelconque. Soit T une période strictement positive de f .

Il existe un entier relatif n tel que $nT \leq x < (n+1)T$ à savoir $n = E\left(\frac{x}{T}\right)$. Avec cet entier n , on a bien $f(x) = f(x - nT)$ avec $0 \leq x - nT < T$.

Soit alors $N \in \mathbb{N}^*$. Puisque G_f est dense dans \mathbb{R} , il existe dans G_f un réel T_N tel que $0 < T_N < \frac{1}{N}$ ce qui implique que $\lim_{N \rightarrow +\infty} T_N = 0$.

Mais alors, puisque $0 < x - E\left(\frac{x}{T_N}\right)T_N < T_N$, on a aussi $\lim_{N \rightarrow +\infty} x - E\left(\frac{x}{T_N}\right)T_N = 0$. Or, la suite $\left(f\left(x - E\left(\frac{x}{T_N}\right)T_N\right)\right)_{N \geq 0}$ est constante (égale à $f(x)$) et donc convergente. On en déduit que

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{N \rightarrow +\infty} f\left(x - E\left(\frac{x}{T_N}\right)T_N\right) = f\left(\lim_{N \rightarrow +\infty} \left(x - E\left(\frac{x}{T_N}\right)T_N\right)\right) \quad (\text{par continuité de } f) \\ &= f(0) \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

c) Soit r un nombre rationnel. Soit x un réel.

- Si x est un rationnel, alors $x + r$ est un rationnel et donc $\chi_{\mathbb{Q}}(x + r) = 1 = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$,
- Si x est un irrationnel, alors $x + r$ est un irrationnel (dans le cas contraire, $x = (x + r) - r$ serait un rationnel ce qui n'est pas) et donc $\chi_{\mathbb{Q}}(x + r) = 0 = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$.

Ainsi, pour tout réel x , $\chi_{\mathbb{Q}}(x + r) = \chi_{\mathbb{Q}}(x)$. Tout rationnel est période de $\chi_{\mathbb{Q}}$.

Soit s un nombre irrationnel. $\chi_{\mathbb{Q}}(0 + s) = \chi_{\mathbb{Q}}(s) = 0$ et $\chi_{\mathbb{Q}}(0) = 1$. Donc, s n'est pas une période de $\chi_{\mathbb{Q}}$.

Finalement, le groupe des périodes de $\chi_{\mathbb{Q}}$ est \mathbb{Q} . Ce groupe des périodes est dense dans \mathbb{R} mais n'est pas égal à \mathbb{R} .