UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA
Faculté des Sciences Aïn Chock – Casablanca

Année universitaire 2020-2021
Filière SMPC
Module : Mécanique 1

Session 1 : Durée 1h 30 mn

Exercice 1 : Courbe en coordonnées cartésiennes

Soit $\mathcal{R}(o;x,y,z)$ un référentiel muni de la base ortho normée directe$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Un point matériel M mobile dans le plan (xOy), décrit **dans le sens positif** la courbe (C) définie en coordonnées cartésiennes par :

$$x(t) = 1 + t, \quad y(t) = (t^2 - 1), \quad z(t) = 0.$$

1 - Déterminer l'équation de la trajectoire du point M, en déduire sa nature. Dessiner l'allure de la trajectoire.

2 - Calculer à l'instant t le vecteur vitesse $\vec{V}(M/_{\mathcal{R}})$ et son module $\|\vec{V}(M/_{\mathcal{R}})\|$.

3 - En déduire le vecteur tangent $\vec{\tau}(M/_{\mathcal{R}})$ et normal $\vec{n}(M/_{\mathcal{R}})$.

4- Calculer à l'instant t le vecteur accélération $\vec{a}(M/_{\mathcal{R}})$, l'accélération tangentielle a_t et normale a_n. En déduire le rayon de courbure R_C.

Exercice 2 : Courbe en coordonnées polaires

Un point matériel M décrit **dans le sens positif**, dans le plan (xOy) d'un référentiel $\mathcal{R}(O,x,y,z)$ de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ la courbe C définie en coordonnées polaires habituelles par :

$$r = r_0 e^{-\theta}$$

Où $r(t) = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\theta(t) = (\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}})$ aux quelles on associe la base polaire $\mathcal{B}(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$.
$\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ et $(\widehat{\vec{e}_r,\vec{e}_\theta}) = \frac{\pi}{2}$. **Tous les résultats vectoriels doivent être exprimés dans la base $\mathcal{B}(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$.**

1 – Calculer $\vec{V}(M/_{\mathcal{R}})$ et $\|\vec{V}(M/_{\mathcal{R}})\|$ en fonction de r_0, θ et $\dot{\theta}$. En déduire les $\vec{\tau}(M/_{\mathcal{R}})$ et $\vec{n}(M/_{\mathcal{R}})$.

2 - Calculer le rayon de courbure R_C

3 – Calculer l'abscisse curviligne $s(\theta)$, on prendra $s(0) = 0$.

4 – Calculer $\vec{a}(M/_{\mathcal{R}})$ en fonction de r_0, θ et $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

Exercice 3 : Composition de mouvements

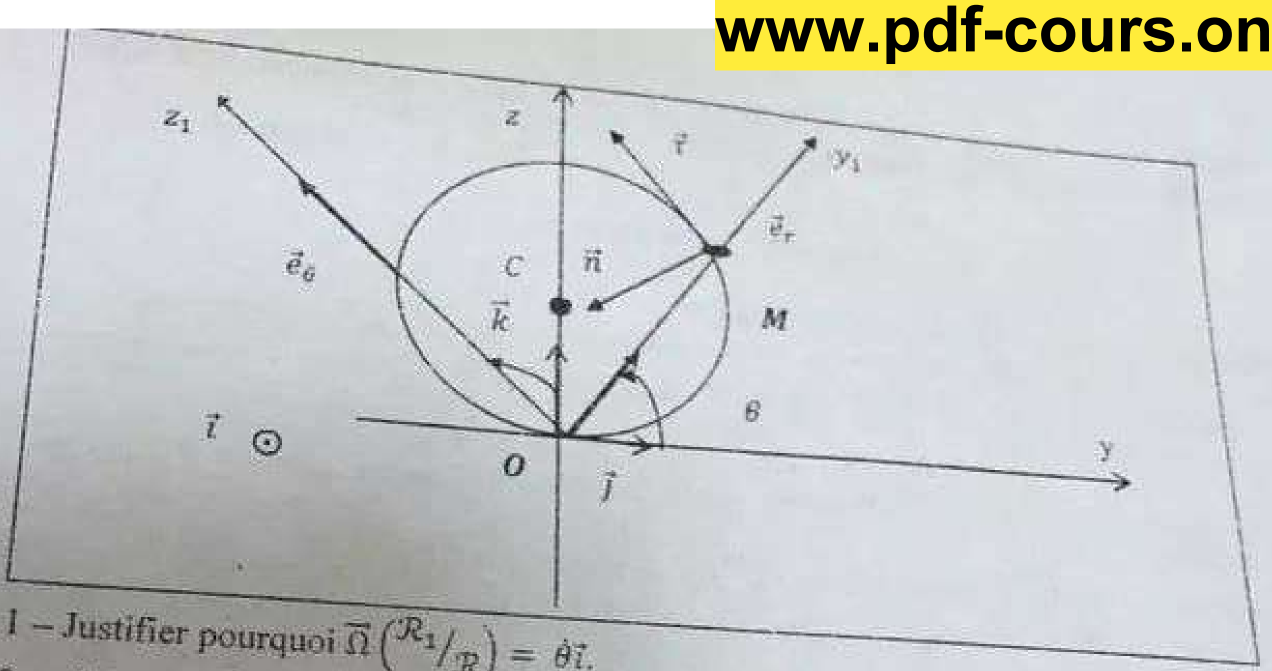
Soient $\mathcal{R}(o;x,y,z)$ **le référentiel absolu** d'origine le point O muni de la base orthonormée directe $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$et $\mathcal{R}_1(O;x_1,y_1,z_1)$ **un référentiel relatif** d'origine le point O muni de la base orthonormée directe $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{\imath})$, Au cours du temps les axes (Ox) et (Ox_1) restent colinéaires. Dans le plan vertical (yOz), un point matériel M, décrit le cercle de centre $C(0,0,a)$ et de rayon a d'équation :

$$r = 2a\sin\theta$$

où $r(t) = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\theta(t) = (\widehat{\vec{\jmath},\overrightarrow{OM}})$ fonctions du temps t, tel que : $\overrightarrow{OM} = 2a\sin\theta\,\vec{e}_r$ (voir figure). $\dot{\theta}(t)$ est une fonction croissante du temps t.

Tous les résultats vectoriels doivent être exprimés dans la base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{\imath})$.

Tournez la page S.V.P



1 – Justifier pourquoi $\vec{\Omega}\left({\mathcal{R}_1}/{\mathcal{R}}\right) = \dot{\theta}\vec{i}$.

2 – Calculer $\vec{V}_r(M)$, $\vec{V}_e(M)$ respectivement les vitesses relative et d'entrainement en déduire $\vec{V}_a(M)$ la vitesse absolue.

3- Calculer l'accélération relative $\vec{a}_r(M) = \vec{a}\left({M}/{\mathcal{R}_1}\right)$, d'entrainement $\vec{a}_e(M) = \vec{a}(M \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R})$ et de Coriolis $\vec{a}_c(M)$. En déduire l'accélération absolue $\vec{a}_a(M) = \vec{a}\left({M}/{\mathcal{R}}\right)$.

4 – Retrouver les vecteurs vitesse absolue $\vec{V}_a(M)$ et accélération absolue $\vec{a}\left({M}/{\mathcal{R}}\right)$ par le calcul direct.

$\rightarrow$

Correction Exmane session 1

Mecanique du point

1/ equation de la trajectoire

on $\begin{cases} x = 1+t \\ y = (t^2-1) \\ z = 0 \end{cases}$ on remplace $t = x-1$ sur

equation $y = (t^2-1) \Rightarrow y = ((x+1)^2 - 1) = x^2 + 2x$

nature de trajectoire parabole

2/ $\vec{V}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_R = \frac{dx}{dt}\Big|_R \vec{i} + \frac{dy}{dt}\Big|_R \vec{j}$

$= \vec{i} + 2t\vec{j}$

$\|\vec{V}(M/R)\| = \sqrt{1+4t^2}$

3/ on definition $\vec{\tau}(M/R) = \frac{\vec{V}(M/R)}{\|\vec{V}(M/R)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{i} + \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{j}$

la normale $\vec{n}(M/R)$ on mouvement sur plan (ox, y)

$\Rightarrow \vec{n} = \vec{k} \wedge \vec{\tau} = \vec{k} \wedge \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \\ \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{j} - \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{i}$

4) $\vec{a}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\Big|_{R_0} = 2\vec{j}$

$$a_t = \vec{\gamma}\cdot\vec{\tau} = 2\vec{j}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{i} + \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\cdot\vec{j}\right)$$

$$= \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}} \quad \text{ou} \quad a_t = \frac{dV}{dt}.$$

$$a_n = \vec{\gamma}\cdot\vec{n} = 2\vec{j}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{j} - \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}}\vec{i}\right) = \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$$

On $a_n = \frac{V^2}{R_c} \Rightarrow R_c = \frac{1+4t^2}{\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}} = \frac{(1+4t^2)^{3/2}}{2}.$

Exercice 2

$$\text{on} \quad \vec{OM} = r\,\vec{e_r} = r_0 e^{-\theta}\vec{e_r}$$

1/ $$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R = -r_0\dot{\theta}e^{-\theta}\vec{e_r} + r_0\dot{\theta}e^{-\theta}\vec{e_\theta}.$$

$$= r_0\dot{\theta}\left[\vec{e_\theta} - \vec{e_r}\right]e^{-\theta}$$

$$= r_0\dot{\theta}e^{-\theta}\vec{e_\theta} - r_0\dot{\theta}e^{-\theta}\vec{e_r}$$

$$\vec{\tau}(M/R) = \frac{\vec{V}(M/R)}{\|\vec{V}(M/R)\|} = \frac{r_0\dot{\theta}e^{-\theta}(\vec{e_\theta} - \vec{e_r})}{\sqrt{2(r_0\dot{\theta}e^{-\theta})^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_\theta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_r}$$

$$\vec{n}(M/R) = \vec{k}\wedge\vec{\tau} = \vec{k}\wedge\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_\theta} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_r}\right]$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_r} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e_\theta}$$

2) Rayon de courbure R_c

on $\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \vec{n} \cdot \frac{d\theta}{ds} \frac{ds}{dt} = \vec{n} \cdot \frac{d\theta}{R_c d\theta} \|\vec{V}(M/R)\|$

$ds = R_c d\theta$

$$\Rightarrow \quad R_c = \frac{\|\vec{V}(M/R)\|}{\|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\|}$$

d $\quad \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{-\dot{\theta}}{\sqrt{2}} \vec{e_r} - \frac{\dot{\theta}}{\sqrt{2}} \vec{e_\theta}$

$$\|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\| = \sqrt{\frac{\dot{\theta}^2}{2} + \frac{\dot{\theta}^2}{2}} = \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow R_c = \frac{\sqrt{2} r_0 \dot{\theta} e^{-\theta}}{\dot{\theta}} = \sqrt{2} r_0 e^{-\theta}$$

3/ on $\quad ds = R_c d\theta = \sqrt{2} r_0 e^{-\theta} d\theta$

$$s(\theta) = -\sqrt{2} r_0 e^{-\theta} + S_0$$

$$S(0) = 0 = -\sqrt{2} r_0 + S_0 \Rightarrow$$

$$S_0 = +\sqrt{2} r_0$$

$$\Rightarrow S(\theta) = \sqrt{2} r_0 [1 - e^{-\theta}]$$

3

4/ • $\vec{a}(M|R)$ deux methode :

(1)

$$\vec{a}(M|R) = \frac{d\vec{V}(M|R)}{dt}\Big|_R = \Big[r_0\ddot{\theta}[\vec{e}_\theta - \vec{e}_r] - r_0\dot{\theta}^2[\vec{e}_\theta - \vec{e}_r] + r_0\dot{\theta}^2[-\vec{e}_r - \vec{e}_\theta]\Big]e^{-\theta}$$

$$= [\,r_0\ddot{\theta} - 2r_0\dot{\theta}^2\,]e^{-\theta}\vec{e}_\theta - r_0\ddot{\theta}\,e^{-\theta}\vec{e}_r$$

Methode 2

$$\vec{a}(M|R) = \frac{dV}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{R_c}\vec{n}$$

⋮

<u>Exercic 3</u>

1) $$\frac{d\vec{e}_r}{dt}\Big|_R = \cancel{\frac{d\vec{e}_r}{dt}\Big|_{R_1}}^{\,0} + \vec{\Omega}(R_1|R)\wedge\vec{e}_r$$

$$\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \vec{\Omega}(R_1|R)\wedge\vec{e}_r$$

$$\dot{\theta}\vec{k}\wedge\vec{e}_r = \vec{\Omega}(R_1|R)\wedge\vec{e}_r$$

on $\vec{e}_\theta = \vec{k}\wedge\vec{e}_r \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\Omega}(R_1|R) = \dot{\theta}\vec{k}$$

2) $$\vec{V}_r(M) = \frac{d\,\vec{O_1M}}{dt}\Big|_{R_1} = \dot{r}\,\vec{e}_r = 2a\dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{e}_r$$

$$\cancel{\vec{V}_e(M) = \frac{d\vec{OO_1}}{dt}\Big|_R + \frac{d\vec{\Omega}(R_1|R)}{dt}\wedge\vec{O_1M} + \vec{\Omega}(R_1|R)\wedge(\vec{\Omega}\wedge\vec{O_1M})}$$

$$\cancel{= \ddot{\theta}\vec{k}\wedge r\vec{e}_r + \dot{\theta}\vec{k}\wedge(\dot{\theta}\vec{k}\wedge r\vec{e}_r)}$$

$$\cancel{= 2\ddot{\theta}a\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\vec{k}\wedge(\dot{\theta}2a\sin\theta\,\vec{e}_\theta)}$$

$$\cancel{= 2a\ddot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_\theta - 2a\dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{e}_r}$$

(4)

$\vec{V}_a(M) = \vec{V}_e + \vec{V}_r(M|R_1) = 2a\dot{\theta}\sin\theta$

$\vec{V}_e = \frac{d\vec{OO}}{dt} + \vec{\Omega} \wedge \vec{OM} = \dot{\theta}\vec{k} \wedge r\vec{e_r}$

$= 2\dot{\theta}a\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

$\vec{V}_a(M|R) = 2\dot{\theta}a\sin\theta\,\vec{e_\theta} + 2a\dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{e_r}$

3/ $\vec{a}_e(M|R) = \underbrace{\frac{d^2\vec{OO}}{dt^2}\Big|_R}_{=0} + \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OM})$

$= 2\ddot{\theta}a\sin\theta\,\vec{e_\theta} - 2a\dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{e_r}$

$\vec{a}_c(M|R) = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r = 2\dot{\theta}\vec{k} \wedge (2a\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e_r})$

$= + 4a\dot{\theta}^2\cos\theta\,\vec{e_\theta}$

$\vec{a}_r(M|R_1) = \frac{d\vec{V}(M|R_1)}{dt}\Big|_R$

$= 2a\ddot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{e_r} - 2a\dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{e_r}$
$- 2a\dot{\theta}^2\cos\theta\,\vec{e_\theta}$

$= 2a[\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta]\vec{e_r}$
$- 2a\dot{\theta}^2\cos\theta\,\vec{e_\theta}$

$\vec{a}_a(M|R) = \vec{a}_e + \vec{a}_c + \vec{a}_r =$

$= 2\ddot{\theta}a\sin\theta\,\vec{e_\theta} - 2a\dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{e_r}$
$- 4a\dot{\theta}^2\cos\theta\,\vec{e_\theta}$
$+ 2a[\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta]\vec{e_r}$
$- 2a\dot{\theta}^2\cos\theta\,\vec{e_\theta}$

$$\vec{a}_a(M/R) = \left[-2a\dot{\theta}^2\sin\theta + 2a\ddot{\theta}\cos\theta - 2a\dot{\theta}^2\sin\theta\right]\vec{e_r}$$

$$+\left[2\ddot{\theta}a\sin\theta + 4a\dot{\theta}^2\cos\theta\right]\vec{e_\theta}$$

$$= \left[-4a\dot{\theta}^2\sin\theta + 2a\ddot{\theta}\cos\theta\right]\vec{e_r} + \left[2\ddot{\theta}a\sin\theta + 4a\dot{\theta}^2\cos\theta\right]\vec{e_\theta}$$

4) $$\vec{V}_a(M) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$

$$= 2a\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e_r} + 2a\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a}_a(M) = \left.\frac{d\vec{V_a}(M)}{dt}\right|_R = \left[2a\ddot{\theta}\cos\theta - 2a\dot{\theta}^2\sin\theta\right]\vec{e_r}$$

$$+ 2a\dot{\theta}^2\cos\theta\,\vec{e_\theta}$$

$$+ 2a\ddot{\theta}\sin\theta\,\vec{e_\theta} + 2a\dot{\theta}^2\cos\theta\,\vec{e_\theta}$$

$$- 2a\dot{\theta}^2\sin\theta\,\vec{e_r}$$

$$= \left[2a\ddot{\theta}\cos\theta - 2a\dot{\theta}^2\sin\theta - 2a\dot{\theta}^2\sin\theta\right]\vec{e_r}$$

$$+ \left[+2a\dot{\theta}^2\cos\theta + 2a\ddot{\theta}\sin\theta + 2a\dot{\theta}^2\cos\theta\right]\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a}_a(M) = \left[2a\ddot{\theta}\cos\theta - 4a\dot{\theta}^2\sin\theta\right]\vec{e_r} + \left[4a\dot{\theta}^2\cos\theta + 2a\ddot{\theta}\sin\theta\right]\vec{e_\theta}$$