Département de Mathématiques et Informatique

Examen d'Analyse - Module M1
Filières SM – SMI – SMP – SMC **Durée : 1h30**

Exercice : Soit $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Montrer que la dérivée d'ordre n de f vérifie :

$f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ où P_n est un polynôme de degré n et donner la relation entre P_{n+1} et P_n.

Problème

Rappel : $Arctg$ est la fonction réciproque de la fonction tangente. $Arctg:\Re\to\left]-\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{\pi}{2}\right[$.

C'est une fonction impaire qui vérifie :

$$\begin{pmatrix} y=Arctgx \\ x\in\Re \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x=tgy \\ y\in\left]-\dfrac{\pi}{2},+\dfrac{\pi}{2}\right[\end{pmatrix} \quad et \quad (Arctgx)'=\frac{1}{1+x^2}$$

Partie 1 : Soit $f(x)=2(x-1)-Arctgx$ définie sur $\Re$.

1) Etudier la dérivabilité et la monotonie de f
2) i) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

   ii) Montrer que $\begin{cases} Arctgx+Arctg\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2} & si\ x>0 \\ Arctgx+Arctg\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2} & si\ x<0 \end{cases}$

   iii) Déterminer les asymptotes à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$ en précisant les positions relatives de C_f par rapport à ces asymptotes.
3) Ecrire le Développement limité d'ordre 3 de f(x) au voisinage de 0. En déduire l'équation de la tangente en 0 et la position relative de C_f par rapport à cette tangente.
4) Montrer que l'équation f(x)=0 admet une racine unique $\alpha\in\left]1,\sqrt{3}\right[$.

   ($\sqrt{3}\approx 1,73$ et $\pi\approx 3,14$)
5) i) Enoncer le théorème des accroissements finis

   ii) Montrer que : $\exists c\in\left]1,\alpha\right[:\dfrac{\pi}{4}=(\alpha-1)f'(c)$

Partie 2 : Soit la suite réelle (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0=\dfrac{3}{2} \\ u_{n+1}=1+\dfrac{1}{2}Arctgu_n=g(u_n) \end{cases}$

1) Vérifier que : $g(\alpha)=\alpha$
2) Montrer que : $\forall n:|u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$ et en déduire que $\forall n:|u_n-\alpha|\le\dfrac{1}{2^n}|u_0-\alpha|$
3) Montrer que (u_n) converge en précisant sa limite.

Corrigé de l'examen Analyse I :

Exercice :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-1/2}.$$

Par récurrence $f'(x) = \dfrac{-x}{(1+x^2)^{1+1/2}}$; $P_1(x) = -x$.

on suppose que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1/2}}$

on calcul $f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}(x)\right)' = \left(\dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1/2}}\right)'$

$$= \frac{P_n'(x)(1+x^2)^{n+1/2} - P_n(x)(1+x^2)^{n+1/2-1} \cdot 2x(n+1/2)}{\left[(1+x^2)^{n+1/2}\right]^2}$$

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{(1+x^2)P_n'(x) - (2n+1)xP_n(x)}{(1+x^2)^{(n+1)+1/2}}$$

et on a $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P_n'(x) - (2n+1)xP_n(x)$

Problème :

Partie 1 : $f(x) = 2(x-1) - \operatorname{Arctg} x$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{2x^2+1}{x^2+1} > 0$.
donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) i) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; car $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{Arctg} x = \pi/2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; car $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{Arctg} x = -\pi/2$.

ii) $\left(\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg}\dfrac{1}{x}\right)' = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{-1/x^2}{1+1/x^2} = \dfrac{1}{1+x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 0$.
donc $\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg}\dfrac{1}{x} = cste$.

- si $x>0$, pour $x=1$ $\operatorname{Arctg} 1 + \operatorname{Arctg} 1/1 = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \pi/2$.
  donc $\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg}\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$ si $x>0$.
- si $x<0$, $\operatorname{Arctg} x$ est impaire $\operatorname{Arctg} x + \operatorname{Arctg} 1/x = -(\operatorname{Arctg}(-x) + \operatorname{Arctg} 1/(-x)) = -\pi/2$ car $-x>0$.

iii) • en $+\infty$

$f(x) = 2(x-1) - \operatorname{Arctg} x$, on pose $x = \dfrac{1}{h}$.

$= 2\left(\dfrac{1}{h} - 1\right) - \operatorname{Arctg}\left(\dfrac{1}{h}\right) = \dfrac{2}{h} - 2 - \left(\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctg} h\right)$.

$= \dfrac{2}{h} - 2 - \dfrac{\pi}{2} + \operatorname{Arctg} h$.

et comme $\operatorname{Arctg} h = h + o(h)$ DL_0^1

on a $f\left(\dfrac{1}{h}\right) = \dfrac{2}{h} - 2 - \dfrac{\pi}{2} + h + o(h)$.

c.à.d $f(x) = 2x - 2 - \pi/2 + 1/x + o(1/x)$ $DL^1_{+\infty}$.

donc $y = 2x - 2 - \pi/2$ est asymptote à C_f en $+\infty$ et

Comme $1/x > 0$ au voisinage de $+\infty$ on a C_f au dessus de l'asymptote en $+\infty$.

• en $-\infty$: $f(x) = f(\frac{1}{h}) = 2(\frac{1}{h} - 1) - \text{Arctg}\,\frac{1}{h}$.

$$= \frac{2}{h} - 2 - (-\pi/2 - \text{Arctg}\,h).$$

$$= \frac{2}{h} - 2 + \frac{\pi}{2} + \text{Arctg}\,h = \frac{2}{h} - 2 + \pi/2 + h + o(h).$$

$\Rightarrow f(x) = 2x - 2 + \pi/2 + 1/x + o(1/x)$ $DL^1_{-\infty}$

donc $y = 2x - 2 + \pi/2$ est asymptote à C_f en $-\infty$

et comme $1/x < 0$ au voisinage de $-\infty$ alors C_f est au dessous de l'asymptote en $-\infty$.

3) $\text{Arctg}\,x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$?

$\Rightarrow f(x) = 2x - 2 - x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

$= x - 2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3) = -2 + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

• l'équation de la tangente en 0. $T: y = x - 2$.

• la position de C_f : $\frac{x^3}{3} > 0$ si $x > 0$.

$\frac{x^3}{3} < 0$; si $x < 0$.

C_f au dessus de T à droite de 0 et en dessous à gauche de 0.

4) $f(1) = -\text{Arctg}\,1 = -\pi/4 < 0$.

$f(\sqrt{3}) = 2(\sqrt{3} - 1) - \text{Arctg}\,\sqrt{3} = 2(\sqrt{3} - 1) - \pi/3$.

$\simeq 2(1{,}73 - 1) - \frac{3{,}14}{3} \simeq 2 \times 0{,}73 - 1{,}04 \simeq 0{,}42 > 0$.

$f(1)\cdot f(\sqrt{3}) < 0$ et f continue sur $[1, \sqrt{3}]$. $\Rightarrow$ T.V.I, $\exists \alpha \in]1, \sqrt{3}[$: $f(\alpha) = 0$.

• unicité : f est strictement croissante, elle est donc injective d'où l'unicité.

5) i) le théorème des accroissements finis :

Si f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

alors $\exists c \in]a, b[$. $f(b) - f(a) = (b - a) f'(c)$.

ii) T.A.F appliqué à f sur $[1, \alpha]$ $\Rightarrow \exists c \in]1, \alpha[$:

$f(\alpha) - f(1) = (\alpha - 1) f'(c)$.

$f(\alpha) = 0$ et $f(1) = -\pi/4$. donc $\frac{\pi}{4} = (\alpha - 1) f'(c)$.

Partie 2 : $u_0 = 3/2$; $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\text{Arctg}\,u_n = g(u_n)$.

1) $g(x) = 1 + \frac{1}{2}\text{Arctg}\,x$.

$f(\alpha) = 2(\alpha - 1) - \text{Arctg}\,\alpha = 0$

$\Rightarrow 2\alpha = 2 + \text{Arctg}\,\alpha \Rightarrow \alpha = 1 + \frac{1}{2}\text{Arctg}\,\alpha = g(\alpha)$. d'où $g(\alpha) = \alpha$.

2) T.A.F sur $[\alpha, u_n] \Rightarrow \exists c \in]\alpha, u_n[$; $g(u_n) - g(\alpha) = (u_n - \alpha) g'(c)$

a $g'(x) = -\frac{1}{2(1+x^2)} \Rightarrow |g'(x)| \leq 1/2$. $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow |g(u_n) - g(\alpha)| \leq 1/2\,|u_n - \alpha|$ a $u_{n+1} = g(u_n)$

$|u_{n+1} - \alpha| \leq 1/2\,|u_n - \alpha|$. $g(\alpha) = \alpha$.

$$\left.\begin{array}{l} |u_n - \alpha| \leq 1/2\,|u_{n-1} - \alpha| \\ \vdots \\ |u_1 - \alpha| \leq 1/2\,|u_0 - \alpha| \end{array}\right\} \Rightarrow |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - \alpha|.$$

3) $\lim_{n\to+\infty} 1/2^n = 0$; $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$ converge.