Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences
Agadir

Rattrapage d'Analyse - Module M1
Filières SM– SMI

Durée : 1h30

Question de cours :

1) Enoncer (sans démonstration) le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I)
2) Montrer que l'équation : $\cos x = x$ admet une solution dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 1 :

On se propose d'étudier la convergence de la suite : $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} - Logn$

1) Montrer l'inégalité : $\frac{1}{n+1} \leq Log(n+1) - Logn \leq \frac{1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$

(*Indication* : Utiliser le théorème des Accroissements finis à la fonction $f(x) = Logx$)

2) a) Montrer que $u_n \in [0,1] \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$
   b) Montrer que (u_n) est décroissante
   c) En déduire que (u_n) est convergente
   ($\gamma = \lim_n u_n$ est appelée : constante d'Euler)

Exercice 2 :

Calculer la limite suivante : $I = \lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$

Exercice 3 :

1) Soit C_f la courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$. Montrer que lorsque x est au voisinage de l'infini, on peut écrire : $f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{48x^2} + o(\frac{1}{x^2})$.

Déterminer l'asymptote de la courbe C_f au voisinage de l'infini et la position de C_f par rapport à l'asymptote.

2) Donner le développement limité d'ordre 2 de la fonction $g(x) = \frac{2Logx}{x}$ au voisinage de 2 et étudier la position relative de la courbe Cg par rapport à la tangente en 2.

Questions de cours : (3 pts)

1) Le Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I).

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ telle que $f(a)\cdot f(b)<0$. alors il existe au moins un point $c\in]a,b[$ tel que $f(c)=0$.

2) on pose $f(x)=\cos x - x$

Alors f est continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et vérifie :

$f(0)=1>0$ et $f(\pi/2)=-\pi/2<0$.

D'après le T.V.I, il existe au moins un point $c\in]0,\pi/2[$ tel que $f(c)=0$. donc c est solution de l'équation $\cos x = x$.

Exercice 1 : (6pts)

$U_n = 1+1/2+1/3+\cdots+1/n-\log n$;

1) Appliquons le T.A.F à fonction $x\longrightarrow \log x$ continue dérivable sur l'intervalle $[n,n+1]$: $\exists c\in]n,n+1[\,/\log(n+1)-\log n = f'(c)$ $=\frac{1}{c}$ or $\frac{1}{c}\in]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[$ d'où l'inégalité souhaitée.

2-a) on applique l'inégalité 1°) n fois et on somme.

$$\frac{1}{2}<\log 2-\log 1<1$$
$$\frac{1}{3}<\log 3-\log 2<\frac{1}{2}$$
$$\vdots$$
$$\frac{1}{n}<\log n-\log(n-1)<\frac{1}{n-1}$$

$-1+U_n+\log n<\log n<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}$, puis on retranche

$\log n \Rightarrow -1+U_n<0<1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-1}-\log n<U_n$.

D'où $U_n\in[0,1]\ \forall n\geq 1$.

b) $U_{n+1}-U_n=\frac{1}{n+1}-[\log(n+1)-\log n]\leq 0$ d'après 1°).

donc (U_n) est décroissante.

c) (U_n) est une suite décroissante minorée par 0.

donc convergente.

Exercice 2 : (4pts).

Posons $f(x)=\dfrac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$

on a $(1+x)^{1/x}=e^{1/x\log(1+x)}$.

DL_0^2 : $\log(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$.

$\Rightarrow \frac{1}{x}\log(1+x)=1-\frac{x}{2}+o(x)$.

$\Rightarrow (1+x)^{1/x}=e^{[1-\frac{x}{2}+o(x)]}=e\cdot e^{-x/2+o(x)}=e\cdot e^{u}$.

avec $u=-\frac{x}{2}+o(x)$ qui tend vers 0 lorsque $x\longrightarrow 0$.

DL_0^1 : $e^u=1+u+o(u)$.

$\Rightarrow (1+x)^{1/x}=e\,(1-\frac{x}{2}+o(x))=e-\frac{e\cdot x}{2}+o(x)$.

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{-e(\frac{x}{2})+o(x)}{x}=-\frac{e}{2}+o(1)$.

c/c : $I = \lim_{x \to 0} f(x) = -\frac{e}{2}$.

Exercice 3 : (7pts) :

1) $f(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}$

a) on pose $u = \frac{1}{x} \longrightarrow 0$ quand $x \to \infty$

$f(x) = f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{1+e^u}$.

DL_0^3 : $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3) = 1 + V$.

avec $V = u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + o(u^3)$ $V \longrightarrow 0$ car $u \longrightarrow 0$.

$\frac{1}{1+e^u} = \frac{1}{1+(1+V)} = \frac{1}{2+V} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+V/2} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{V}{2} + \frac{V^2}{4} - \frac{V^3}{8} + o(V^3)\right]$.

on garde les puissances ≤ 3, d'où :

$V^2 = u^2 + u^3 + o(u^3)$ et $V^3 = u^3 + o(u^3)$.

$\Rightarrow \frac{1}{1+e^u} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{u}{2} + \frac{u^3}{24} + o(u^3)\right]$.

$\Rightarrow f(x) = f\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{1}{u} \cdot \frac{1}{1+e^u} = \frac{1}{2u} - \frac{1}{4} + \frac{u^2}{24} \times \frac{1}{2} + o(u^2)$.

$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ car $u = \frac{1}{x}$

c/c : quand $x \longrightarrow \infty$, $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ est asymptote à $\mathcal{C}$.

b) $f(x) - y = \frac{1}{48x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right) \geq 0$.

donc $\mathcal{C}$ est au dessus de l'asymptote au voisinage de l'infini

2) $g(x) = \frac{2\log x}{x}$ DL_2^2

on pose $h = x - 2 \Leftrightarrow x = h + 2$ qd $x \longrightarrow 2$; $h \longrightarrow 0$.

on a $\frac{2\log x}{x} = 2\,\frac{\log(2+h)}{2+h} = \frac{2[\log 2 + \log(1+h/2)]}{2\cdot(1+h/2)}$.

$= \frac{1}{1+h/2} \cdot [\log 2 + \log(1+h/2)] = [1 - h/2 + h^2/4 + o(h^2)][\log 2 + h/2 - \frac{h^2}{8} + o(h^2)]$

$= \log 2 + \left[\frac{1}{2} - \frac{\log 2}{2}\right]h + \left[-\frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{\log 2}{4}\right]h^2 + o(h^2)$.

$= \log 2 + \frac{1}{2}(1 - \log 2)h + 1/4\,(\log 2 - 3/2)\,h^2 + o(h^2)$

DL_2^2 d'où $g(x) = \log 2 + \frac{1}{2}(1 - \log 2)(x-2) + \frac{1}{4}\left(\log 2 - \frac{3}{2}\right)(x-2)^2 + o((x-2)^2)$

• L'équation de la tangente en 2 est : $y = \log 2 + \frac{1}{2}(1 - \log 2)(x-2)$.

• la position de $\mathcal{C}_g$ par rapport à la tangente est donnée par : $\frac{1}{4}(\log 2 - 3/2)(x-2)^2 < 0$ car $\log 2 - \frac{3}{2} < 0$ et donc $\mathcal{C}_g$ est au dessous de T qd $x \longrightarrow 2^+$ et $x \longrightarrow 2^-$.