Département de Mathématiques et Informatique
Faculté des Sciences
Agadir

Mars 2005
Enseignant : D. Mammass

Durée : 1 h 45

Rattrapage d'Analyse
Module M 1 (SM – SMP – SMC)

Exercice 1

1- Vérifier que : $\forall x > 0 : Arctg x + Arctg\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$

2- Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^3+5x-2})(\frac{\pi}{2} - Arctg x)^2}{\sin\frac{1}{x}}$

Exercice 2

1) A l'aide de la formule de Taylor, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x - \frac{x^2}{2} < Log(1+x) < x$

2).Sachant que : $1+2+....+n = \frac{n(n+1)}{2}$ *et* $1^2+2^2+....+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, utiliser 1) pour

calculer les limites des deux suites : $\begin{cases} S_n = Log(1+\frac{1}{n^2}) + Log(1+\frac{2}{n^2}) + ... + Log(1+\frac{n}{n^2}) \\ P_n = (1+\frac{1}{n^2}) \times (1+\frac{2}{n^2}) \times .... \times (1+\frac{n}{n^2}) \end{cases}$

Exercice 3

A l'aide des DL, déterminer les asymptotes de la fonction $f(x) = (x-1)^2 Log\frac{x+1}{x-1}$ au voisinage de $+\infty$ *et* $-\infty$ en précisant les positions relatives par rapport à la courbe C_f.

Exercice 4

1. Soit la fonction g définie par $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$. Montrer que l'équation g(x)=x admet une solution unique $\alpha \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$.

2. Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 \in \left[\frac{3}{2}, 2\right] \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

i) Montrer qu'il existe $k < 1$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N} : |u_{n+1} - \alpha| \le k|u_n - \alpha|$

ii) Déduire de i) la nature de la suite (u_n).

Exercice 5

Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} + 2Arctg\frac{1-x}{1+X}$

1. a) Donner le domaine de définition de f ; b) Calculer f'

2. Montrer que les dérivées successives de f vérifient : $f^{(n-1)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^n}$ où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n et donner la relation reliant P_n , P_{n-1} *et* P'_{n-1}

Exercice 1 :

1) $\left(\text{Arctg}\,x + \text{Arctg}\,\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1/x^2}{1+1/x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0$

$\Rightarrow \text{Arctg}\,x + \text{Arctg}\,\frac{1}{x} = cte$

Comme $\text{Arctg}\,1 + \text{Arctg}\,1/1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

on a $\text{Arctg}\,x + \text{Arctg}\,\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ si $x > 0$.

2) $\frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\,x = \text{Arctg}(1/x)$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+5x-2}\right)\left(\frac{\pi}{2} - \text{Arctg}\,x\right)^2}{\sin(1/x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^3+5x-2)^{1/3}(\text{Arctg}\,1/x)^2}{\sin(1/x)} =$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{5}{x^2} - 2/x^3\right)^{1/3}(\text{Arctg}\,1/x)^2}{\sin(1/x)} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right)^{1/3}\left(\frac{\text{Arctg}\,1/x}{1/x}\right)^2\left(\frac{1/x}{\sin 1/x}\right) = 1$$

Exercice 2 :

1) $x \in \mathbb{R}_+^*$ $f(t) = \text{Log}(1+t)$ de classe C^1 sur $[0,x]$ et sa dérivée $\frac{1}{1+t}$ est dérivable sur $]0,x[$, donc vérifie la formule de Taylor à l'aide 2 sur $[0,x]$.

$\exists c \in]0,x[$: $\text{Log}(1+x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2} f''(c)$

c.à.d : $\text{Log}(1+x) = x - \frac{x^2}{2(1+c)^2}$.

$c \in]0,x[\Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*; x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$.

$S_n = \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \log\left(1+\frac{2}{n^2}\right) + \dots + \log\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$

on a $\forall c \in \{1,2,\dots,n\}$ $\frac{c}{n^2} + \frac{c^2}{2n^4} < \log\left(1+\frac{c}{n^2}\right) < \frac{c}{n^2}$.

En sommant $S_n < \frac{1}{n^2}(1+2+\dots n)$.

et $S_n > \frac{1}{n^2}(1+\dots+n) - \frac{1}{2n^4}(1^2+2^2+\dots+n^2)$.

et comme $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ et $1^2+2^2+\dots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

on a $\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} < S_n < \frac{n+1}{2n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

d'où $S_n \longrightarrow \frac{1}{2}$ d'autre part $P_n = e^{S_n} \longrightarrow e^{1/2} = \sqrt{e}$.

Exercice 3 :

$f(x) = (x-1)^2 \log\frac{x+1}{x-1}$. on pose $h = \frac{1}{x} \longrightarrow 0$ qd $x \longrightarrow \pm\infty$.

$f\left(\frac{1}{h}\right) = \left(\frac{1}{h}-1\right)^2 \log\frac{1+1/h}{1/h-1} = (1/h-1)^2\log\frac{1+h}{1-h}$.

$= \left(\frac{1}{h}-1\right)^2\left[\log(1+h) - \log(1-h)\right]$

$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 + o(h^2)$. $\log(1+h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + o(h^3)$.

$\log(1-h) = -h - \frac{h^2}{2} - \frac{h^3}{3} + o(h^3)$.

$\log \frac{1+h}{1-h} = 2h + \frac{2}{3} h^3 + o(h^3)$.

et $\left(\frac{1}{h}-1\right)^2 \log\left(\frac{1+h}{1-h}\right) = \left(\frac{1}{h^2} - \frac{2}{h} + 1\right)\left(2h + \frac{2}{3}h^3 + o(h^3)\right)$.

$$= \frac{2}{h} - 4 + \frac{2}{3}h + o(h).$$

DL∞ $\Rightarrow f(x) = 2x - 4 + \frac{2}{3x} + o(1/x)$. asymptote $y = 2x-4$

C_f au dessus de l'asymptote en $-\infty$.

C_f au dessous de l'asymptote en $+\infty$.

Exercice 4 :

1) $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$. $h(x) = g(x) - x = 1 + \frac{1}{x} - x$

h est continue sur $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ et $h(2) = -1/2$, $h(3/2) = 1/6$.

T.V.I $\Rightarrow \exists c \in]3/2, 2[$ $h(c) = 0$ c.à.d $g(c) = c$.

unicité :

$h'(x) = -\frac{1}{x^2} - 1 < 0 \Rightarrow h$ est $\downarrow$ et comme h continue

elle est bijective $\Rightarrow$ unicité de la solution on pose $c = \alpha$

2) i) T.A.F $|U_{n+1} - \alpha| = |g(U_n) - g(\alpha)| = |g'(c)||U_n - \alpha|$.

$c \in]U_n, \alpha[\rightarrow c \in]3/2, 2[$.

$g'(c) = -\frac{1}{c^2} \rightarrow \frac{1}{4} < |g'(c)| < \frac{4}{9} < 1/2$.

d'où $|U_{n+1} - \alpha| < \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$.

ii) $|U_n - \alpha| < \frac{1}{2}|U_{n-1} - \alpha| < \frac{1}{2^2}\cdot|U_{n-2} - \alpha| < \cdots < \frac{1}{2^n}|U_0 - \alpha|$.

qd $n \rightarrow +\infty$ $\frac{1}{2^n} \rightarrow 0 \Rightarrow U_n \rightarrow \alpha$.

Exercice 5 :

$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+1} + 2\,\mathrm{Arctg}\,\frac{1-x}{1+x}$.

1) a- $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ b) $f'(x) = \frac{-4x^2 - 2x}{(x^2+1)^2}$.

2) on a $f'(x) = \frac{P_2(x)}{(x^2+1)^2}$ avec $P_2(x) = -4x^2 - 2x$.

Supposons que c'est vrai à l'ordre $(n-2)$

$f^{(n-2)}(x) = \frac{P_{n-1}(x)}{(x^2+1)^{n-1}}$ où $d^\circ P_{n-1} = n-1$.

$$f^{(n-1)}(x) = \left(\frac{P_{n-1}(x)}{(x^2+1)^{n-1}}\right)' = \frac{P'_{n-1}(x)(x^2+1)^{n-1} - P_{n-1}(x)(n-1)(x^2+1)^n}{(x^2+1)^{2n-2}}$$

$$= \frac{(x^2+1)^{n-2}}{(x^2+1)^{2n-2}}\left[P'_{n-1}(x)(x^2+1) - 2(n-1)x\,P_{n-1}(x)\right].$$

$$f^{(n-1)}(x) = \frac{P_n(x)}{(x^2+1)^n}$$

avec $P_n(x) = P'_{n-1}(x)(x^2+1) - 2(n-1)x\,P_{n-1}(x)$ et $d^\circ P_n = n$.