UNIVERSITE HASSAN DE II CASABLANCA
Faculté des Sciences Aïn Chock – Casablanca

Année universitaire 2020-2021
Filière SMIA

Epreuve de mécanique session 1: Durée : 1h 30

Soit $R_0 = R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un repère supposé Galiléen. On désigne par $R_1 = R(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un repère en mouvement de translation par rapport au repère R_0 et dont l'origine A se déplace sur l'axe $O\vec{j}$ avec une accélération $\vec{\Gamma}(A/R_0) = a\vec{j}$; (a *constante* > 0).
Un pendule simple dans le plan vertical $(A, \vec{i}, \vec{j})$, est constitué d'un point matériel M de masse m, suspendu à l'origine A du repère R_1 par un fil sans masse et de longueur l. On note $\theta(t)$ l'angle que fait le fil avec la verticale descendante $A\vec{i}$ (figure). En plus de son poids $\vec{P}$ le point M est soumis à la tension $\vec{F}$ du fil. On donnera **tous les résultats vectoriels dans la base mobile $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{k})$ liée au point M.**

Question 1 :

a- Déterminer les vecteurs vitesse $\vec{V}(M/R_1)$ et $\vec{V}_e(M)$. Déduire $\vec{V}(M/R_0)$.

b - Déterminer les vecteurs accélération $\vec{\Gamma}(M/R_1)$, $\vec{\Gamma}_e(M)$ et $\vec{\Gamma}_c(M)$. Déduire $\vec{\Gamma}(M/R_0)$.

Question 2 : On se place dans le repère R_0

a- Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point M. Donner leurs expressions.

b- Ecrire le principe fondamentale dans le repère R_0, et montrer que l'équation du mouveme[nt] est donnée par :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{a}{l}\cos\theta = 0 \qquad (*)$$

Question 3 : On se place dans le repère R_1

a- Justifier que le repère R_1 n'est pas galiléen.

b- Faire le bilan des forces s'exerçant sur M dans le repère R_1. Donner leurs expressions.

c- Ecrire le principe fondamentale dans le repère R_1 et retrouver l'équation (*)

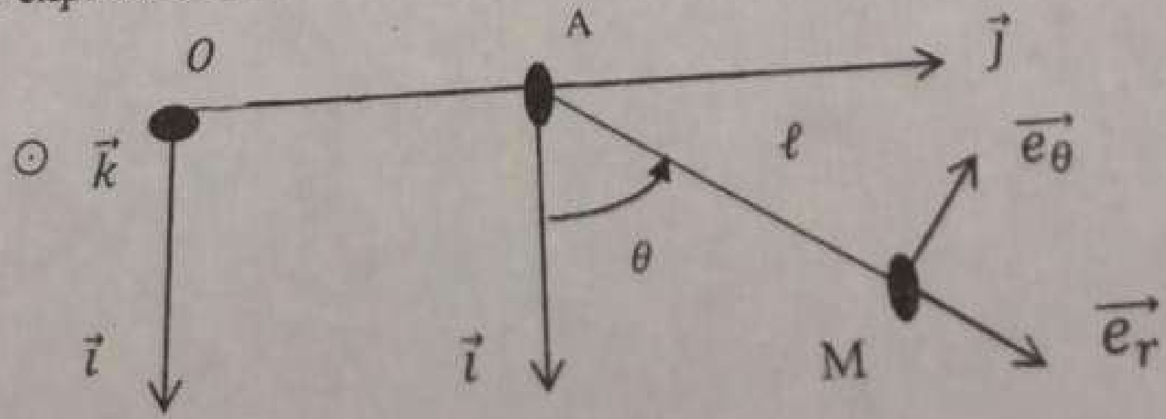
Question 4 :

a- En utilisant l'équation du mouvement (*), déterminer la position d'équilibre θ_0.

b- Montrer que la période des petites oscillations autour de la position d'équilibre est :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\sqrt{a^2 + g^2}}}$$

c- Déterminer l'expression de la tension $F(\theta)$.



Figure

Exam Mecanique du Point (SMIA)
Session normal 2020/2021

$R_0(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ galiléen
$R_1(A,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ non galiléen
$R(A,\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{k})$ lié au point M (m)

$\vec{\gamma}(A/R_0)=a\vec{j}$
$\vec{AM}=l\vec{e_r}$
$\vec{\Omega}(R_1/R_0)=\vec{0}$

R_1 en mouvement de translation par rapport R_0

Q1

a - calcule les vecteurs vitesse $\vec{V}_r(M/R_1)$ et $\vec{V}_e(M)$ $\vec{V}_a(M/R_0)$

* $\vec{V}_r=\frac{d\vec{AM}}{dt}\Big/_{R_1}=l\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

$\vec{e_r}$ mobile par rapport R_1 donc $\frac{d\vec{e_r}}{dt}\Big/_{R_1}=\dot{\theta}\vec{e_\theta}$

* $\vec{V}_e=\vec{V}(A/R_0)+\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{AM}$

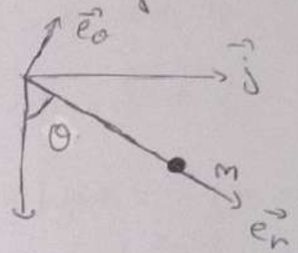
$\vec{V}_e=\vec{V}(A/R_0)=at\vec{j}$

on a $\vec{\gamma}(A/R_0)=a\vec{j}$ et $\vec{\gamma}(A/R_0)=\frac{d\vec{V}(A/R_0)}{dt}$

$\vec{V}_e=at(\cos\theta\,\vec{e_\theta}+\sin\theta\,\vec{e_r})$

$\vec{V}(A/R_0)=\int\vec{\gamma}(A/R_0)\,dt=at\vec{j}$

* $\vec{V}_a=\vec{V}_r+\vec{V}_e$



$\vec{V}_a=at\sin\theta\,\vec{e_r}+(l\dot{\theta}+at\cos\theta)\vec{e_\theta}$

b - calcule les vecteurs $\vec{\gamma}(M/R_1)$, $\vec{\gamma}_c(M)$, $\vec{\gamma}_e(M)$ et $\vec{\gamma}(M/R_0)$

* $\vec{\gamma}(M/R_1)=\vec{\gamma}_r=\frac{d\vec{V}_r}{dt}\Big/_{R_1}$

* $\vec{\gamma}_c=2\,\cancel{\vec{\Omega}(R_1/R)}\wedge\vec{V}_r$

$\vec{\gamma}_r=l\ddot{\theta}\vec{e_\theta}-l\dot{\theta}^2\vec{e_r}$

$\vec{\gamma}_c=\vec{0}$

* $\vec{\gamma}_e=\vec{\gamma}(A/R_0)+\underbrace{\dot{\vec{\Omega}}(R_1/R_0)}_{\vec{0}}\wedge\vec{AM}+\underbrace{\vec{\Omega}(R_1/R_0)}_{\vec{0}}\wedge(\underbrace{\vec{\Omega}(R_1/R_0)}_{\vec{0}}\wedge\vec{AM})$

$\vec{\gamma}_e=\vec{\gamma}(A/R_0)=a\vec{j}=a(\cos\theta\,\vec{e_\theta}+\sin\theta\,\vec{e_r})$

$\vec{\gamma}_a=\vec{\gamma}_e+\vec{\gamma}_c+\vec{\gamma}_r=$

$\vec{\gamma}_a=(a\sin\theta-l\dot{\theta}^2)\vec{e_r}+(l\ddot{\theta}+a\cos\theta)\vec{e_\theta}$

Q3 : <u>on se place dans R_0</u>

a - bilan des forces s'exerçant sur le point M

$\vec{P}=mg\vec{i}=mg(\cos\theta\,\vec{e_r}-\sin\theta\,\vec{e_\theta})$

$\vec{F}=-F\vec{e_r}$

b - PFD dans le Repere galiléen

$$\sum \vec{F}_{ext} = m\,\vec{\gamma}_a$$

$$\vec{P} + \vec{F} = m\,\vec{\gamma}_a$$

$$(mg\cos\theta - F)\vec{e}_r - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta = \underline{m(a\sin\theta - l\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + m(l\ddot{\theta} + a\cos\theta)\vec{e}_\theta}$$

$$\begin{cases} mg\cos\theta - F = m(a\sin\theta - l\dot{\theta}^2) & (1) \\ -mg\sin\theta = m(l\ddot{\theta} + a\cos\theta) & (2) \end{cases}$$

(2) $-\cancel{m}g\sin\theta = \cancel{m}(l\ddot{\theta} + a\cos\theta)$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{a}{l}\cos\theta = 0$$

Q_3 : on se place dans le repére R_1

a - R_1 n'est pas galiléen car il mouve par rapport R_0 (R_1 mobil)
et on a des force parasites

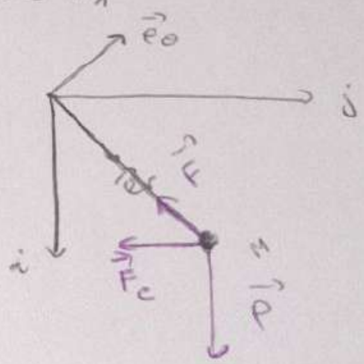
b - le bilan des forces s'exerçant sur M dans R_1

$$\vec{P} = mg\,\vec{i} = mg(\cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta)$$

$$\vec{F} = -F\,\vec{e}_r$$

$$\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c = \vec{0}$$

$$\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e = -am(\cos\theta\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\vec{e}_r)$$



c - PFD dans le repere non galiléen

$$\sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_c + \vec{F}_e = m\,\vec{\gamma}_r$$

$$\vec{P} + \vec{F} + \vec{F}_c + \vec{F}_e = m\,\vec{\gamma}_r$$

$$(mg\cos\theta - F - am\sin\theta)\vec{e}_r + (-mg\sin\theta - am\cos\theta)\vec{e}_\theta = ml\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - ml\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

$$\begin{cases} mg\cos\theta - F - am\sin\theta = -ml\dot{\theta}^2 & (1') \\ -m \\ -mg\sin\theta - am\cos\theta = ml\ddot{\theta} & (2') \end{cases}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{a}{l}\cos\theta = 0$$

Q4:

a- détermination de la position d'équilibre θ_0 à partir de l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{a}{l}\cos\theta = 0$$

$$\theta = \theta_0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\theta_0 = -\frac{a}{g}$$

b- démonstration de la période des petites oscillation autour de la position d'équilibre

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$$[\theta_0] \to [\theta_0 + \varepsilon] \qquad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta + \frac{a}{l}\cos\theta = 0$$

$\ddot{\theta}_0 = 0$

$$(\ddot{\varepsilon} + \ddot{\theta}_0) + \frac{g}{l}(\sin(\theta_0 + \varepsilon)) + \frac{a}{l}\cos(\theta_0 + \varepsilon) = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{l}\left(\cancel{\sin(\theta_0)\cos(\varepsilon)} + \sin(\varepsilon)\cos(\theta_0)\right) + \frac{a}{l}\left(\cancel{\cos(\theta_0)\cos(\varepsilon)} - \sin\varepsilon\,\sin(\theta_0)\right) = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{l}\left[\sin(\varepsilon)\cos(\theta_0)\right] - \frac{a}{l}\left[\sin(\theta_0)\sin(\varepsilon)\right] = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\sin(\varepsilon)}{l}\left[g\cos\theta_0 - a\sin\theta_0\right] = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\sin(\varepsilon)}{l}\, g\left(\cos\theta_0 + \frac{\sin^2(\theta_0)}{\cos(\theta_0)}\right) = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{l\cos(\theta_0)}\sin(\varepsilon) = 0 \Longrightarrow \ddot{\varepsilon} + \frac{g}{l}\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\theta_0)}\,\sin(\varepsilon) = 0$$

A.S.H.M1

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{g}{l}\sqrt{1 + \frac{a^2}{g^2}}\,\sin(\varepsilon) = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}\sin(\varepsilon) = 0$$

$$\ddot{\varepsilon} + \omega^2 \sin(\varepsilon) = 0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\sqrt{g^2 + a^2}}{l}}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}$$

c- la tension $F(\theta)$

(1)

$$F = m g\cos\theta - a m \sin\theta + m l \dot{\theta}^2$$