

MATRICES EXERCICES CORRIGES

Exercice n°1.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 8 & 4 \\ 0 & 7 & 3 & 11 \\ 22 & 17 & 0,1 & 8 \end{pmatrix}$.

- 1) Donner le format de A
- 2) Donner la valeur de chacun des éléments a_{14} , a_{23} , a_{31} et a_{22}
- 3) Ecrire la matrice transposée A' de A et donner son format

Exercice n°2.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & \dots & 7 \\ \dots & 9 & \dots \\ 8 & \dots & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

www.pdf-cours.online

- 1) Compléter l'écriture de A de format 4×3 avec : $a_{12} = 5$, $a_{23} = -4$, $a_{21} = 8$ et $a_{13} = 11$
- 2) Ecrire la matrice transposée A' de A et donner son format

Exercice n°3.

- 1) Donner une matrice dont la transposée est égale à son opposée.
- 2) Donnez la matrice A telle que pour tout indice i et j avec, $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$, le terme a_{ij} soit donné par la formule $a_{ij} = 2i - j$

Exercice n°4.

On donne $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Calculez $A+B$, $A-B$, $3A$, $4B$, $3A-4B$

Exercice n°5.

On donne $A = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix}$.

- 1) Trouver x et y pour que $A+B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$
- 2) Trouver x et y pour que $2A-4B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$

Exercice n°6.

On considère les matrices A , B et C définies par $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -14 & 7 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$

Trouver deux réels x et y tels que $xA + yB = C$.

Exercice n°7.

Effectuer les produits suivants lorsque c'est possible. Lorsque c'est impossible, dire pourquoi.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

Exercice n°8.

Calculer, puis comparer les produits $A \times B$ et $B \times A$

a) $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice n°9.

Dans chacun des cas, calculer les produits $A \times B$ et $B \times A$. Quelle particularité présente-t-il ?

a) $A = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice n°10.

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ où x est un réel.

Déterminer x pour que $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$

Exercice n°11.

Calculez et comparez $A^2 + 2AB + B^2$ et $(A+B)^2$ avec : $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice n°12.

Soit les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On se propose de rechercher s'il existe une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $A \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$.

1) Traduire cette égalité par un système de quatre équations à quatre inconnues

2) Résoudre ce système

3) Pour les valeurs trouvées a, b, c , et d , on pose $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Vérifier que $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_2$

Exercice n°13.

Définir pour chaque système la matrice A et le vecteur colonne C tels que le système donné soit équivalent à l'égalité matricielle $A \times X = C$

$$1) \begin{cases} -5x + 3y = 2 \\ -x + y = 5 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2,23x - 5,5y = 12 \\ 0,2x + y = 7 \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 3x - y + 2z = 7 \\ 5x + y - z = 8 \\ -x + 3y + 7z = -22 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 3x - y = 15 \\ y + 7z = 12 \\ x + y = 25 \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x + y + z = -5 \\ -y + z = 2 \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x + 6y = x + z + 31 \\ 7y + 2z = x - y + 27 \end{cases}$$

Exercice n°14.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$

1) A l'aide de la calculatrice, donner la matrice inverse A^{-1} (mettre les coefficients sous forme fractionnaire)

2) En déduire la résolution des systèmes suivants :

$$a) \begin{cases} 3x - 10y = 4 \\ -2x + 8y = 7 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x - 10y = 1,5 \\ -2x + 8y = -0,4 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} 3x - 10y = 15 \\ -2x + 8y = -5 \end{cases}$$

$$d) \begin{cases} 3x - 10y = 1,25 \\ -2x + 8y = 0,5 \end{cases}$$

Exercice n°15.

1) On considère le système $\begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + y + 3z = b \\ x - y + 2z = c \end{cases}$ où x, y, z, a, b et c sont des nombres réels.

Exprimer les nombres réels x, y et z en fonction de a, b et c

2) On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que la matrice A est inversible et donner l'expression de A^{-1}

Exercice n°16.

On suppose que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c et d sont des réels tels que $ad - bc \neq 0$

1) Trouver en fonction de a, b, c et d les réels x, y, z et t tels que : $A \times \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

2) Vérifier que A admet pour matrice inverse : $A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

MATRICES - EXERCICES CORRIGES

CORRECTION

Exercice n°1

- 1) La matrice A est de format 3×4 puisqu'elle contient 3 lignes et 4 colonnes
- 2) a_{14} est le nombre figurant à l'intersection de la 1^{ère} ligne et de la 4^{ème} colonne, donc $a_{14} = 4$
- a_{23} est le nombre figurant à l'intersection de la 2^{ème} ligne et de la 3^{ème} colonne, donc $a_{23} = 3$
- a_{33} est le nombre figurant à l'intersection de la 3^{ème} ligne et de la 3^{ème} colonne, donc $a_{33} = 0,1$
- a_{32} est le nombre figurant à l'intersection de la 3^{ème} ligne et de la 2^{ème} colonne, donc $a_{32} = 17$
- 3) La matrice transposée A' de A s'obtient en intervertissant lignes et colonnes de A .

On obtient donc $A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 22 \\ -6 & 7 & 17 \\ 8 & 3 & 0,1 \\ 4 & 11 & 8 \end{pmatrix}$. La matrice A' est donc de dimension 4×3

Exercice n°2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & \dots & 7 \\ \dots & 9 & \dots \\ 8 & \dots & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

www.pdf-cours.online

- 1) a_{32} est le nombre figurant à l'intersection de la 3^{ème} ligne et de la 2^{ème} colonne
- a_{23} est le nombre figurant à l'intersection de la 2^{ème} ligne et de la 3^{ème} colonne
- a_{21} est le nombre figurant à l'intersection de la 2^{ème} ligne et de la 1^{ère} colonne
- a_{12} est le nombre figurant à l'intersection de la 1^{ère} ligne et de la 2^{ème} colonne

On complète ainsi la matrice A : $A = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 7 \\ 8 & 9 & -4 \\ 8 & 5 & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

- 2) La matrice transposée A' de A s'obtient en intervertissant lignes et colonnes de A .

On obtient donc $A' = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 8 & 7 \\ 11 & 9 & 5 & 1 \\ 7 & -4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. La matrice A' est donc de dimension 3×4

Exercice n°3

- 1) Toute matrice antisymétrique possède une transposée égale à son opposée.

Par exemple, si on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on aura $A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = -A$

- 2) L'indication $1 \leq i \leq 3$ et $1 \leq j \leq 3$ nous donne le format de la matrice A : il s'agit d'une matrice 3×3 .
De plus on calcule successivement $a_{11} = 2 - 1 = 1$, $a_{12} = 2 - 2 = 0$, $a_{13} = 2 - 3 = -1$, $a_{21} = 4 - 1 = 3$,
 $a_{22} = 4 - 2 = 2$, $a_{23} = 4 - 3 = 1$, $a_{31} = 6 - 1 = 5$, $a_{32} = 6 - 2 = 4$ et $a_{33} = 6 - 3 = 3$.

La matrice A est donc : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice n°4

On calcule successivement :

$$A+B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+7 & 5+2 \\ 3+(-1) & -1+(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-7 & 5-2 \\ 3-(-1) & -1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$3A = 3 \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 2 & 3 \times 5 \\ 3 \times 3 & 3 \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad 4B = \begin{pmatrix} 4 \times 7 & 4 \times 2 \\ 4 \times (-1) & 4 \times (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 8 \\ -4 & -12 \end{pmatrix}$$

$$3A-4B = \begin{pmatrix} 6 & 15 \\ 9 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 28 & 8 \\ -4 & -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-28 & 15-8 \\ 9-(-4) & -3-(-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 & 7 \\ 13 & 9 \end{pmatrix}$$

Exercice n°5

1) On exprime d'une part $A+B = \begin{pmatrix} x & 5 \\ 0 & 2x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 7 \\ -1 & 3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 5+7 \\ 0+(-1) & 2x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & 12 \\ -1 & 2x+3y \end{pmatrix}$

On aura l'égalité $A+B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{pmatrix} x+y & 12 \\ -1 & 2x+3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$ donc par identification des

différents termes si et seulement si $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=17 \end{cases}$. On résout ce système par substitution :

$$\begin{cases} x+y=4 & L_1 \\ 2x+3y=17 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x & L_1 \\ 2x+3(4-x)=17 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x & L_1 \\ 2x+12-3x=17 & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x & L_1 \\ -x=5 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-(-5) & L_1 \\ x=-5 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} y=9 & L_1 \\ x=-5 & L_2 \end{cases}}$$

L'égalité $A+B = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ -1 & 17 \end{pmatrix}$ aura donc lieu pour $x=-5$ et $y=9$

2) On exprime d'une part $2A-4B = \begin{pmatrix} 2x & 10 \\ 0 & 4x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4y & 28 \\ -4 & 12y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x-4y & -18 \\ 4 & 4x-12y \end{pmatrix}$

On aura l'égalité $2A-4B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$ si et seulement si $\begin{pmatrix} 2x-4y & -18 \\ 4 & 4x-12y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$ donc par

identification des différents termes si et seulement si $\begin{cases} 2x-4y=-5 \\ 4x-12y=-16 \end{cases}$. On résout ce système par substitution :

$$\begin{cases} 2x-4y=-5 & L_1 \\ 4x-12y=-16 & L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4y=-5 & L_1 \\ 2x-6y=-8 & \frac{1}{2}L_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=4y-5 & L_1 \\ -2y=-3 & \frac{1}{2}L_2-L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x=4 \times \frac{3}{2} - 5 & L_1 \\ y=\frac{3}{2} & \frac{1}{2}L_2-L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=1 & L_1 \\ y=\frac{3}{2} & \frac{1}{2}L_2-L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=\frac{1}{2} & L_1 \\ y=\frac{3}{2} & \frac{1}{2}L_2-L_1 \end{cases}}$$

L'égalité $2A-4B = \begin{pmatrix} -5 & -18 \\ 4 & -16 \end{pmatrix}$ aura donc lieu pour $x=\frac{1}{2}$ et $y=\frac{3}{2}$

Exercice n°6

$$\text{On calcule : } xA + yB = x \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -4 & 2 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 1 \\ 8 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-2y & 3x \\ -4x-2y & 2x+y \\ 8y & 7x+y \end{pmatrix}.$$

On aura l'égalité $xA + yB = C$ si et seulement si $\begin{pmatrix} x-2y & 3x \\ -4x-2y & 2x+y \\ 8y & 7x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -14 & 7 \\ 24 & 17 \end{pmatrix}$, donc par identification des

termes, si et seulement si $\begin{cases} x-2y = -4 \\ 3x = 6 \\ -4x-2y = -14 \\ 2x+y = 7 \\ 8y = 24 \\ 7x+y = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}}$

Exercice n°7

a) Les matrices étant respectivement de format 3×2 et 2×2 , leur produit est bien défini et est une matrice 3×2 . On a alors :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2 + 5 \times 4 & 2 \times 5 + 5 \times 6 \\ 3 \times 2 + 6 \times 4 & 3 \times 5 + 6 \times 6 \\ 4 \times 2 + 7 \times 4 & 4 \times 5 + 7 \times 6 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 30 & 51 \\ 36 & 62 \end{pmatrix}}$$

b) Les matrices étant respectivement de format 2×2 et 3×2 , leur produit est impossible à définir.

c) Les matrices étant respectivement de format 1×3 et 3×3 , leur produit est bien défini et est une matrice 1×3 . On a alors :

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times 0 + 4 \times 2 + 5 \times 3 & -1 \times (-1) + 4 \times 4 + 5 \times 5 & -1 \times 6 + 4 \times (-2) + 5 \times 3 \end{pmatrix} \\ = \boxed{\begin{pmatrix} 23 & 42 & 1 \end{pmatrix}}$$

d) Les matrices étant respectivement de format 3×3 et 3×2 , leur produit est bien défini et est une matrice 3×2 . On a alors :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 1 + 5 \times 2 + 0 \times 3 & 2 \times (-1) + 5 \times 0 + 0 \times 5 \\ 3 \times 1 + 6 \times 2 + 3 \times 3 & 3 \times (-1) + 6 \times 0 + 3 \times 5 \\ 4 \times 1 + 1 \times 2 + 2 \times 3 & 4 \times (-1) + 1 \times 0 + 2 \times 5 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 24 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}}$$

e) Les matrices étant respectivement de format 3×2 et 3×2 , leur produit est impossible à définir.

f) Les matrices étant respectivement de format 3×3 et 3×3 , leur produit est bien défini et est une matrice 3×3 . On a alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 4 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 2 + 0 \times 0 + 5 \times 4 & 1 \times 7 + 0 \times 2 + 5 \times 5 & 1 \times 8 + 0 \times 3 + 5 \times 6 \\ 2 \times 2 + (-1) \times 0 + 6 \times 4 & 2 \times 7 + (-1) \times 2 + 6 \times 5 & 2 \times 8 + (-1) \times 3 + 6 \times 6 \\ 3 \times 2 + 4 \times 0 + 4 \times 7 & 3 \times 7 + 4 \times 2 + 7 \times 5 & 3 \times 8 + 4 \times 3 + 7 \times 6 \end{pmatrix} \\ = \boxed{\begin{pmatrix} 22 & 32 & 38 \\ 28 & 42 & 49 \\ 34 & 64 & 78 \end{pmatrix}}$$

Exercice n°8

Pour chaque exemple, les matrices étant carrées de même format, leur produit dans les deux sens est bien défini

a) Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$, alors :

$$A \times B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \times 4 + 8 \times (-5) & -1 \times 2 + 8 \times 8 \\ 2 \times 4 + 11 \times (-5) & 2 \times 2 + 11 \times 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -44 & 62 \\ -47 & 92 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B \times A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times (-1) + 2 \times 2 & 4 \times 8 + 2 \times 11 \\ (-5) \times (-1) + 8 \times 2 & (-5) \times 8 + 8 \times 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 54 \\ 21 & 48 \end{pmatrix}$$

On constate que $A \times B \neq B \times A$

b) Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 3 + 8 \times 1 & 4 \times 9 + 8 \times 1 \\ 1 \times 3 + 2 \times 1 & 1 \times 9 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 44 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B \times A = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 4 + 9 \times 1 & 3 \times 8 + 9 \times 2 \\ 1 \times 4 + 1 \times 1 & 1 \times 8 + 1 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 42 \\ 5 & 10 \end{pmatrix}$$

On constate que $A \times B \neq B \times A$

c) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, alors :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 5 + 1 \times 2 & 2 \times 2 + 1 \times 3 \\ 1 \times 5 + 1 \times 2 & 1 \times 2 + 1 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } B \times A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \times 2 + 2 \times 1 & 5 \times 1 + 2 \times 1 \\ 2 \times 2 + 3 \times 1 & 2 \times 1 + 3 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

On constate cette fois ci que $A \times B = B \times A$, **mais ce n'est surtout pas une règle générale !**

Exercice n°9

Dans chaque cas, les matrices étant carrées de même format, leur produit est bien défini et est une matrice 2×2

a) Si $A = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$, alors :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 12 + (-12) \times 6 & 6 \times 6 + (-12) \times 3 \\ (-3) \times 12 + 6 \times 6 & (-3) \times 6 + 6 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que le produit $A \times B$ est nul sans pour autant que A ou B soit la matrice nulle

b) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, alors :

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 0 + 4 \times 0 & 2 \times 2 + 4 \times (-1) \\ (-1) \times 0 + (-2) \times 0 & (-1) \times 2 + (-2) \times (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que le produit $A \times B$ est nul sans pour autant que A ou B soit la matrice nulle

Exercice n°10

On calcule $A^2 = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \times x + 1 \times 2 & x \times 1 + 1 \times 3 \\ 2 \times x + 3 \times 2 & 2 \times 1 + 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + 2 & x + 3 \\ 2x + 6 & 11 \end{pmatrix}$. Pour avoir $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$, il

suffit d'avoir $\begin{pmatrix} x^2 + 2 & x + 3 \\ 2x + 6 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2 = 6 \\ x + 3 = 1 \\ 2x + 6 = 2 \end{cases}$, ce qui se produit si et seulement $\boxed{x = -2}$

Exercice n°11

On calcule : $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 4 + 8 \times 1 & 4 \times 8 + 8 \times 2 \\ 1 \times 4 + 2 \times 1 & 1 \times 8 + 2 \times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$, puis

$$B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 3 + 9 \times 1 & 3 \times 9 + 9 \times 1 \\ 1 \times 3 + 1 \times 1 & 1 \times 9 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 4 & 10 \end{pmatrix},$$

et enfin $A \times B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \times 3 + 8 \times 1 & 4 \times 9 + 8 \times 1 \\ 1 \times 3 + 2 \times 1 & 1 \times 9 + 2 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 44 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$.

On peut ainsi calculer :

$$A^2 + 2AB + B^2 = \begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} + 2 \times \begin{pmatrix} 20 & 44 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24 & 40 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 40 & 88 \\ 10 & 22 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 18 & 36 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 & 164 \\ 20 & 44 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'autre part, } A + B = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{d'où : } (A + B)^2 = \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 & 17 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \times 7 + 17 \times 2 & 7 \times 17 + 17 \times 3 \\ 2 \times 7 + 3 \times 2 & 2 \times 17 + 3 \times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 83 & 170 \\ 20 & 42 \end{pmatrix}$$

On constate que $\boxed{A^2 + 2AB + B^2 \neq (A + B)^2}$

Exercice n°12

1) L'équation matricielle $A \times \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = I_2$ se traduit par le système : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 1 \\ b + d = 0 \\ 5a + 6c = 0 \\ 5b + 6d = 1 \end{cases}$

2) On résout séparément deux systèmes : $\begin{cases} a + c = 1 \\ 5a + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - c \\ 5(1 - c) + 6c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - c \\ c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 - (-5) = 6 \\ c = -5 \end{cases}$.

et $\begin{cases} b + d = 0 \\ 5b + 6d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -d \\ 5(-d) + 6d = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -d = -1 \\ d = 1 \end{cases}$

3) On pose : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

On calcule, d'une part $\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \times 1 + (-1) \times 5 & 6 \times 1 + (-1) \times 6 \\ (-5) \times 1 + 1 \times 5 & (-5) \times 1 + 1 \times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Et d'autre part $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 6 + 1 \times (-5) & 1 \times (-1) + 1 \times 1 \\ 5 \times 6 + 6 \times (-5) & 5 \times (-1) + 6 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a bien vérifié bien que $A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_2$

Exercice n°13

1) En posant $A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, le système $\begin{cases} -5x+3y=2 \\ -x+y=5 \end{cases}$ est équivalent à $\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire à $A \times X = C$

2) En posant $A = \begin{pmatrix} 2,23 & -5,5 \\ 0,2 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 12 \\ 7 \end{pmatrix}$, le système $\begin{cases} 2,23x-5,5y=12 \\ 0,2x+y=7 \end{cases}$ est équivalent à $A \times X = C$

3) En posant $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -22 \end{pmatrix}$, le système $\begin{cases} 3x-y+2z=7 \\ 5x+y-z=8 \\ -x+3y+7z=-22 \end{cases}$ est équivalent à $A \times X = C$

4) Le système $\begin{cases} 3x-y=15 \\ y+7z=12 \\ x+y=25 \end{cases}$ se réécrit $\begin{cases} 3x-y+0z=15 \\ 0x+y+7z=12 \\ x+y+0z=25 \end{cases}$

En posant $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 15 \\ 12 \\ 25 \end{pmatrix}$, le système $\begin{cases} 3x-y=15 \\ y+7z=12 \\ x+y=25 \end{cases}$ est équivalent à $A \times X = C$

5) Le système $\begin{cases} x+y+z=-5 \\ -y+z=2 \end{cases}$ se réécrit $\begin{cases} x+y+z=-5 \\ 0x-y+z=2 \end{cases}$

En posant $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, le système $\begin{cases} x+y+z=-5 \\ -y+z=2 \end{cases}$ est équivalent à $A \times X = C$

6) Le système $\begin{cases} 3x+6y=x+z+31 \\ 7y+2z=x-y+27 \end{cases}$ se réécrit $\begin{cases} 2x+6y-z=31 \\ -x+8y+2z=27 \end{cases}$. En posant $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et

$C = \begin{pmatrix} 31 \\ 27 \end{pmatrix}$, le système $\begin{cases} 3x+6y=x+z+31 \\ 7y+2z=x-y+27 \end{cases}$ est équivalent à $A \times X = C$

Exercice n°14

1) Grâce à la calculatrice, on saisit la matrice A et on calcule son inverse

| Saisie de la matrice A | Obtention de la matrice inverse : |
|------------------------|-----------------------------------|
| | |
| | |

2) a) Le système $\begin{cases} 3x-10y=4 \\ -2x+8y=7 \end{cases}$ s'écrit $A \times X = C$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Puisque la matrice A est inversible, on aura $X = A^{-1}C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5/2 \\ 1/2 & 3/4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \times 4 + \frac{5}{2} \times 7 = \frac{51}{2} \\ y = \frac{1}{2} \times 4 + \frac{3}{4} \times 7 = \frac{29}{4} \end{cases}$