Université Mohammed 1ier
Faculté des Sciences
Département de Physique
Oujda

Année universitaire : 2020-2021

EXAMEN DE MÉCANIQUE DU POINT

S.M.P-C/S.1

SESSION ORDINAIRE

Il est conseillé de lire tout le texte avant de commencer à répondre aux questions. Des indications utiles sont données à la fin de l'épreuve (page 2).

On étudie le mouvement d'un point matériel M par rapport à un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, orthonormé direct. A un instant t, le point M se trouve à la position définie par les coordonnées cartésiennes :

$$x(t) = 2\,R\cos^2\frac{\omega t}{2} \quad ; \quad y(t) = R\sin\omega t \quad \text{et} \quad z(t) = 0$$

avec R et ω deux constantes positives.

1) Le point M est en mouvement dans un plan. Quel est ce plan?
2) Quelles sont les équations horaires de ce mouvement?
3) Montrer que la trajectoire du point M est un cercle de rayon R et de centre C, avec : $\overrightarrow{OC} = R\vec{\imath}$ [c'est-à-dire que les coordonnées du centre C sont : (R,0)]
Dessiner sur une figure cette trajectoire, en indiquant la position de départ M_0 à l'instant initial $t = 0$.
4) Calculer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ du point M. Et montrer que son module $\|\vec{V}\| = V$ est une constante.
5) D'après le cours, l'abscisse curviligne $S(t)$ est la longueur du chemin parcouru par le point matériel à partir de l'instant initial jusqu'à un instant t. (A $t = 0$ le point matériel M se trouve à M_0 et $S(t{=}0) = 0$).
En utilisant la relation du cours :

$$\|\vec{V}\| = V = \frac{dS}{dt} \quad \text{ou bien} \quad : \quad dS = V dt$$

montrer que la fonction $S(t) = R\omega t$.
6) La trajectoire étant circulaire, le point M met une durée T , appelée période, pour effectuer un tour complet. Montrer que $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
7) Trouver les équations horaires du mouvement du point en coordonnées polaires : $\rho(t)$ et $\theta(t)$.

Tournez la feuille S.V.P

Corrigé d'Examen Oujda

Pr : Yassine AARIF

2020 - 2021

$x(t) = 2R\cos^2\frac{wt}{2}$; $y(t) = R\sin wt$; $z(t) = 0$

1°/ on a : $\vec{OM} = 2R\cos^2\frac{wt}{2}\,\vec{i} + R\sin wt\,\vec{j} + 0\vec{K}$

$\rightarrow$ le point M est en mouvement dans le plan XOY

car $z(t) = 0$

2°/ les équations horaires :

$$\begin{cases} x(t) = 2R\cos^2\frac{wt}{2} \\ y(t) = R\sin wt \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

3°/ Eq de Trajectoire :

$$\begin{cases} x(t) = 2R\cos^2\frac{wt}{2} \\ y(t) = R\sin wt \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

$\rightarrow x(t) = 2R\cos^2\frac{wt}{2}$

$\cos^2\frac{a}{2} = \frac{1+\cos a}{2}$

$\cos^2\frac{wt}{2} = \frac{1+\cos wt}{2}$

$\longrightarrow x(t) = \cancel{2}R\left(\frac{1+\cos wt}{\cancel{2}}\right)$

$$x(t) = R + R\cos wt$$

$$(x - R)^2 = R^2 \cos^2 wt$$

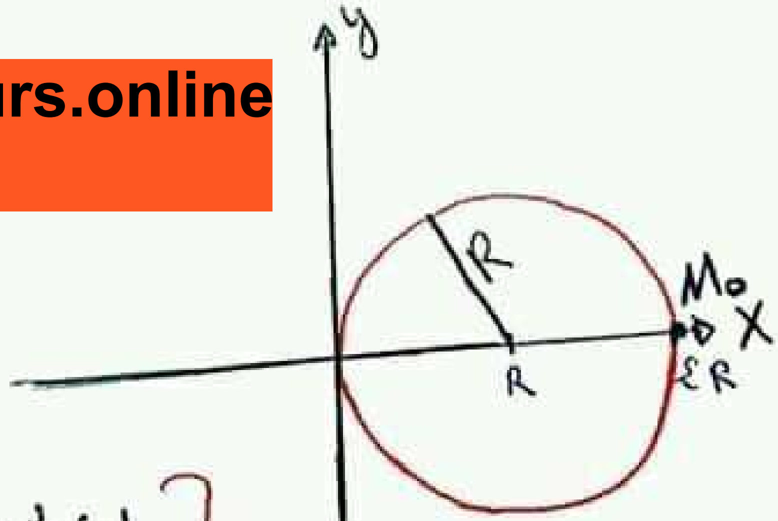
aussi : $y^2 = R^2 \sin^2 wt$

$$\rightarrow (x - R)^2 + y^2 = R^2 \cos^2 wt + R^2 \sin^2 wt$$

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2 (\underbrace{\cos^2 wt + \sin^2 wt}_{1})$$

$$\boxed{(x - R)^2 + y^2 = R^2}$$

$\rightarrow$ la Trajectoire du M est un cercle de Rayon R et de centre $C(R, 0)$



à $t=0$

$x(t=0) = 2R\cos^2(0)$
$= 2R$

$y(t=0) = R\sin(0) = 0$

$\rightarrow$ la position de M_o à $t=0$

$M_o(2R, 0)$

4°/ $\vec{V}(M|R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big/_R = \frac{dx(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ fixe dans R

$$\frac{d\vec{i}}{dt}\Big/_R = \frac{d\vec{j}}{dt}\Big/_R = \frac{d\vec{k}}{dt}\Big/_R = \vec{0}$$

- $\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d(R + R\cos wt)}{dt}\Big/_R = \underbrace{\frac{\cancel{dR}}{\cancel{dt}}}_{R=cte}^{0} + \frac{dR\cos wt}{dt}$

$$= -wR\sin wt$$

- $\frac{dy(t)}{dt}\Big/_R = \frac{dR\sin wt}{dt}\Big/_R = wR\cos wt$

- $\frac{dz(t)}{dt} = 0$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{V}(M|R) = -wR\sin wt\,\vec{i} + wR\cos wt\,\vec{j}}$$

$$\|\vec{V}(M|R)\| = \sqrt{(-wR\sin wt)^2 + (wR\cos wt)^2}$$

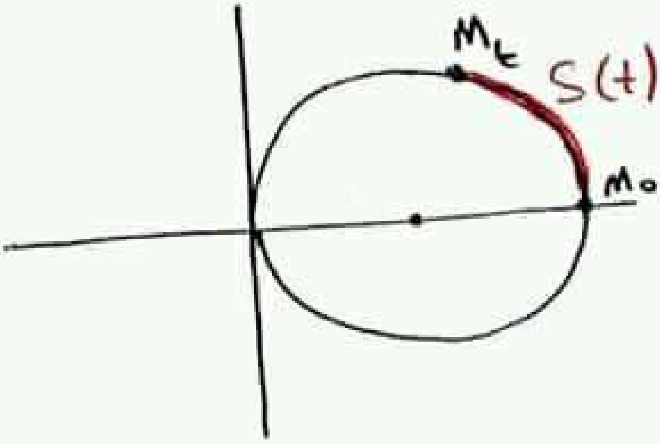
$$= \sqrt{w^2R^2[\sin^2 wt + \cos^2 wt]}$$

$$= \sqrt{w^2R^2}$$

$$\boxed{\|\vec{V}(M|R)\| = wR} \longrightarrow \|\vec{V}(M|R)\| = cte$$

car R, W est constants

5°/



on a : $\|\vec{V}\| = WR$

or : $\|\vec{V}\| = \frac{dS}{dt}$

$\rightarrow \quad WR = \frac{dS}{dt}$

$\rightarrow \quad dS = WR\,dt$

$\rightarrow S(t) = \int_0^t WR\,dt = WRt + cte$

à $t=0$ $\quad S(t=0) = 0 = WR \times 0 + cte \Rightarrow cte = 0$

$$\rightarrow \boxed{S(t) = RWt}$$

6°/ T : période (temp pour effectuer un tour complet)

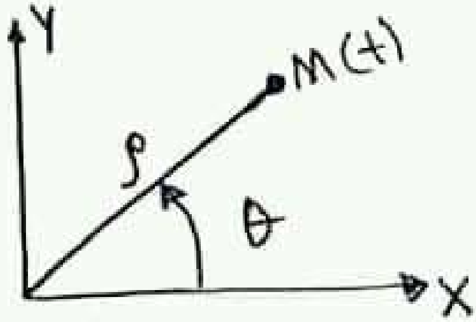
tour complet $\longrightarrow 2\pi$
دورة كاملة

$\rightarrow \quad S(t=T) = \cancel{R}WT = 2\pi \cancel{R}$

$$\rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{W}}$$

7/

$$\rho(t) = \sqrt{x^2 + y^2}$$



$$= \sqrt{(R + R\cos wt)^2 + (R\sin wt)^2}$$

$$= \sqrt{R^2 + 2R^2\cos wt + R^2\cos^2 wt + R^2\sin^2 wt}$$

$$= \sqrt{R^2 + 2R^2\cos wt + R^2(\cos^2 wt + \sin^2 wt)}$$

$$\rho(t) = \sqrt{2R^2 + 2R^2\cos wt}$$

$$\rho(t) = R\sqrt{2 + 2\cos wt}$$

$$\tan\theta = \frac{y(t)}{x(t)} \longrightarrow \theta(t) = \text{Arctan}\,\frac{y(t)}{x(t)}$$

$$\theta(t) = \text{Arctan}\,\frac{\cancel{R}\sin wt}{\cancel{R} + \cancel{R}\cos wt}$$

$$\theta(t) = \text{Arctan}\,\frac{\sin wt}{1 + \cos wt}$$

$$\text{Arctan} \equiv \tan^{-1}$$

$\rightarrow \quad \theta(t) = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sin wt}{1+\cos wt}\right)$

- $\sin a = 2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}$

$\quad \hookrightarrow \quad \sin wt = 2 \sin \frac{wt}{2} \cos \frac{wt}{2}$

- $\cos^2 \frac{a}{2} = \dfrac{1+\cos a}{2}$

$\quad \hookrightarrow \quad \cos^2 \frac{wt}{2} = \dfrac{1+\cos wt}{2}$

$\quad \quad \hookrightarrow \quad 1 + \cos wt = 2 \cos^2\left(\frac{wt}{2}\right)$

Alors:

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{\cancel{2}\sin\left(\frac{wt}{2}\right)\cancel{\cos\left(\frac{wt}{2}\right)}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\left(\frac{wt}{2}\right)}\right)$$

$$\theta(t) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\left(\frac{wt}{2}\right)}{\cos\left(\frac{wt}{2}\right)}\right)$$

$\dfrac{\sin x}{\cos x} = \tan x$

$$\rightarrow \quad \theta(t) = \cancel{\tan^{-1}}\left(\cancel{\tan}\ \frac{wt}{2}\right)$$

$$\boxed{\theta(t) = \frac{wt}{2}}$$

Bon Courage

6