Université Mohamed Premier
Faculté Des Sciences - Oujda
Département De Mathématiques et Informatique
Prof. Mustapha CHELLALI

Année universitaire : 2014/2015
Filière : SMIA S1
Module : Algèbre 1
Examen de la Session de Rattrapage

Session de rattrapage d'autonne 2014

http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2
mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II, III, IV, V sont indépendants

I On utilisant le raisonnement par distinction des cas montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 6 | n(n+11)(n+7)$$

II Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. Soit M l'ensemble des éléments minimaux de $(E, \preceq)$.

1 Rappeler la définition d'une partite totalement non ordonnée.

2 Montrer que M est un ensemble totalement non ordonné.

3 On suppose E fini, montrer que M est maximal (pour l'inclusion parmis les parties totalement non ordonnées de E).

III Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, Montrer qu'il est équivalent de dire :

1 f bijective.

2 $\forall A, B \subset E$ on a $((A \cup B = E)\ et\ (A \cap B = \emptyset)) \Longrightarrow ((f(A) \cup f(B) = F)\ et\ (f(A) \cap f(B) = \emptyset))$.

3 $\forall A \subset E \qquad f(A^c) = (f(A))^c$.

IV Soit $d = \text{pgcd}(164, 60)$.

1 Calculer d au moyen de la factorisation en nombres premiers.

2 Retrouver d par l'algorithme d'Euclide.

3 Calculer $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $164u + 60v = d$.

4 Calculer ppcm$(164, 60)$.

V Soit $x \in \mathbb{N}$.

1 Montrer que si p est un nombre premier impair qui divise x^2+1 alors $\overline{x}^2 = -\overline{1}$ dans $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^*$.

2 Montrer que $\overline{x}$ est d'orde 4 dans $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^*$.

3 En déduire que $p \equiv 1 \mod (4)$.

4 Montrer que tout entier impair $d \in \mathbb{N}$ qui divise $x^2 + 1$ vérifie $d \equiv 1 \mod (4)$.

On suppose dans la suite que les entiers $x, y \in \mathbb{N}$ vérifient :

$$x^2 - y^3 = 7$$

5 Montrer que x, y sont de parités différentes.

6 Montrer que x est pair. (On rappelle que le carré de tout entier impair est $\equiv 1 \mod (8)$).

7 Montrer que $x^2 + 1 = (y+2)(y^2 - 2y + 4)$.

8 Montrer que $y \equiv -1 \mod (4)$.

9 Montrer que la relation $x^2 - y^3 = 7$ n'a pas de solution $x, y \in \mathbb{N}$.

Université Mohamed Premier
Faculté Des Sciences - Oujda
Département De Mathématiques et Informatique
Prof. Mustapha CHELLALI

Année universitaire : 2014/2015
Filière : SMIA S1
Module : Algèbre 1
Examen de la Session de Rattrapage

Session de rattrapage d'autonne 2014

http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2

mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II, III, IV, V sont indépendants

I On utilisant le raisonnement par distinction des cas montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 6|n(n+11)(n+7)$$

Solution 1. On distingue suivant le reste de la division euclidienne de n par 6 :

- Si $n = 6q \longrightarrow n(n+11)(n+7) = 6q(n+11)(n+7)$.
- Si $n = 6q+1 \longrightarrow n(n+11)(n+7) = n(6q+12)(n+7) = 6n(q+2)(n+7)$
- Si $n = 6q+2 \longrightarrow n(n+11)(n+7) = 6(3q+1)(n+11)(2q+3)$.
- Si $n = 6q+3 \longrightarrow n(n+11)(n+7) = 6(2q+1)(n+11)(3q+5)$.
- Si $n = 6q+4 \longrightarrow n(n+11)(n+7) = 6(3q+2)(2q+5)(n+7)$.
- Si $n = 6q+5 \longrightarrow n(n+11)(n+7) = 6n(n+11)(q+2)$.

II Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. Soit M l'ensemble des éléments minimaux de $(E, \preceq)$.

1 Rappeler la définition d'une partite totalement non ordonnée.

2 Montrer que M est un ensemble totalement non ordonné.

3 On suppose E fini, montrer que M est maximal (pour l'inclusion parmis les parties totalement non ordonnées de E).

Solution 2.

1 C'est une partie dans laquelle deux éléments quelconques distints sont incomparables.

2 Si $x, y \in M$ sont distints on ne peut avoir $x \leqslant y$ car y est minimal.

3 Soit M' totalement non ordonné tel que $M \subset M'$, soit $x \in M'$, comme E est fini, il existe $x'(\in M)$ minimal tel que $x' \leqslant x$ (sinon on construit par récurrence une suite infinie (x_n) tel que $\cdots < x_n < x_{n-1} < \cdots < x_0 = x$) comme $x, x' \in M'$ et M' totalement non ordonné, on a $x = x'$, donc $M = M'$.

III Soit $f : E \longrightarrow F$ une application, Montrer qu'il est équivalent de dire :

1 f bijective.

2 $\forall A, B \subset E$ on a $((A \cup B = E)$ *et* $(A \cap B = \emptyset)) \Longrightarrow ((f(A) \cup f(B) = F)$ *et* $(f(A) \cap f(B) = \emptyset))$.

3 $\forall A \subset E \qquad f(A^c) = (f(A))^c$.

Solution 3.

- 1) $\Longrightarrow$ 2) car si 1) : Soient $A, B \subset E$ tel que $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$, alors $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ car f est une application, donc $f(A) \cup f(B) = f(E)$, comme f est surjective on a $f(E) = F$, comme f est injective $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ (d'après le cours), soit $f(A) \cap f(B) = f(\emptyset) = \emptyset$.
- 2) $\Longrightarrow$ 3) car si 2) : Soit $A \subset E$, comme $A \cup A^c = E$ et $A \cap A^c = \emptyset$ on aura $f(A) \cup f(A^c) = F$ et $f(A) \cap f(A^c) = \emptyset$, donc $f(A^c) = f(A)^c$.
- 3) $\Longrightarrow$ 1) car si 3) : $f(E) = f(\emptyset^c) = f(\emptyset)^c = \emptyset^c = F$, donc f est surjective. Soient $x, y \in E$ distints, donc $y \in \{x\}^c$, donc $f(x) \in f(\{x\}^c) = f(\{x\})^c = (\{f(x)\})^c$, donc $f(y) \neq f(x)$, donc f est injective.

IV Soit $d = \text{pgcd}(164, 60)$.

1 Calculer d au moyen de la factorisation en nombres premiers.

2 Retrouver d par l'algorithme d'Euclide.

3 Calculer $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $164u + 60v = d$.

4 Calculer $\text{ppcm}(164, 60)$.

Solution 4.

1 On a $164 = 2^2.41$ et $60 = 2^2.5.3$ donc $d = 2^{\min(2,2)}.41^{\min(1,0)}.5^{\min(0,1)}.3^{\min(0,1)} = 2^2 = 4$.

2

$$\begin{aligned}
&164 = 2.60 + 44\\
&60 = 44 + 16\\
&44 = 2.16 + 12\\
&16 = 12 + 4\\
&12 = 3.4 + 0 \longrightarrow \boxed{d = 4}
\end{aligned}$$

3 Plusieurs méthodes :

– Par l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned}
&164 = 2.60 + 44 \longrightarrow 44 = 164 - 2.60\\
&60 = 44 + 16 \longrightarrow 16 = 60 - 44 = 60 - (164 - 2.60) = 3.60 - 164\\
&44 = 2.16 + 12 \longrightarrow 12 = 44 - 2.16 = (164 - 2.60) - 2.(3.60 - 164) = 3.164 - 8.60\\
&16 = 12 + 4 \longrightarrow 4 = 16 - 12 = (3.60 - 164) - (3.164 - 8.60) = -4.164 + 11.60 \longrightarrow \boxed{u = -4, \quad v = 11}
\end{aligned}$$

– Par la méthode du quotient : On a $d = r_4$ et 4 pair $\longrightarrow$

$$\frac{-u}{v} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{1}{q_4}}}} = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1}}}} = \frac{4}{11} \longrightarrow u = -4, \quad v = 11$$

– Par la méthode de la matrice échelenée :

$$\begin{array}{ll}
(164, 60) & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
(164 - 60 = 104, 60) & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\
(104 - 60 = 44, 60) & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
(44, 60 - 44 = 16) & \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\
(44 - 16 = 28, 16) & \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \\
(28 - 16 = 12, 16) & \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \\
(12, 16 - 12 = 4) & \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ -8 & 3 \end{pmatrix} \\
(12 - 4 = 8, 4) & \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ -19 & 7 \end{pmatrix} \\
(8 - 4 = 4, 4) & \begin{pmatrix} 11 & -4 \\ -30 & 11 \end{pmatrix} \\
(4, 4 - 4 = 0) & \begin{pmatrix} 41 & -15 \\ -30 & 11 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{u = 11, \quad v = -30}
\end{array}$$

4 Deux méthodes :

- En utilisant la factorisation en nombres premiers : On a $164 = 2^2.41$ et $60 = 2^2.3.5$ donc $\text{ppcm}(164, 60) = 2^{\max(2,2)}.3^{\max(1,0)}.5^{\max(0,1)}.41^{\max(0,1)} = 2^2.3.5.41 = 2460$.
- Par la formule :

$$\text{ppcm}(a, b) = \frac{ab}{\text{pgcd}(a, b)} = 164.60/4 = 68.11.2 = 2460 \qquad \square$$

V Soit $x \in \mathbb{N}$.

1 Montrer que si p est un nombre premier impair qui divise x^2+1 alors $\overline{x}^2 = -\overline{1}$ dans $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^*$.

2 Montrer que $\overline{x}$ est d'orde 4 dans $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^*$.

3 En déduire que $p \equiv 1 \mod (4)$.

4 Montrer que tout entier impair $d \in \mathbb{N}$ qui divise $x^2 + 1$ vérifie $d \equiv 1 \mod (4)$.

On suppose dans la suite que les entiers $x, y \in \mathbb{N}$ vérifient :

$$x^2 - y^3 = 7$$

5 Montrer que x, y sont de parités différentes.

6 Montrer que x est pair. (On rappelle que le carré de tout entier impair est $\equiv 1 \mod (8)$).

7 Montrer que $x^2 + 1 = (y + 2)(y^2 - 2y + 4)$.

8 Montrer que $y \equiv -1 \mod (4)$.

9 Montrer que la relation $x^2 - y^3 = 7$ n'a pas de solution $x, y \in \mathbb{N}$.

Solution 5.

1 Comme $p|x^2 + 1$ on a $x^2 + 1 \equiv 0 \mod (p)$, donc $x^2 \equiv -1 \mod (p)$, donc $\overline{x}^2 = -\overline{1}$.

2 $\overline{x}^2 = -\overline{1} \Longrightarrow \overline{x}^4 = 1$ donc l'ordre de $\overline{x}$ dans $\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^*$ divise 4, donc égal $1, 2$ *ou* 4, si cet ordre est 1 *ou* 2 on aurait $\overline{x}^2 = \overline{1}$ or $\overline{x}^2 = -\overline{1}$ donc $\overline{1} = -\overline{1}$ donc $\overline{2} = \overline{0}$ donc $p|2$ donc $p = 2$, or p est impair, donc l'ordre est 4.

3 L'ordre d'un élément d'un groupe divise l'ordre du groupe, donc $4|\left|\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)^*\right| = p - 1$, donc $p \equiv 1 \mod (4)$.

4 Tout les diviseurs premiers de d divisent $x^2 + 1$ et sont impairs (car d est impair), donc sont $\equiv 1 \mod (4)$, comme d est le produit de ses diviseurs premiers, il est $\equiv 1 \mod (4)$.

5 Si x, y étaient simultanément pairs ou impairs, il y en est de même de x^2 et y^3, donc $7 = x^2 - y^3$ serait pair.

6 Si x est impair alors y est pair, donc $8|y^3$, donc $x^2 \equiv 7 \mod (8)$ absurde, donc x est pair et y impair.

7 On a $x^2 = 7 + y^3$ donc $x^2 + 1 = 8 + y^3 = 2^3 + y^3 = (2 + y)(y^2 - 2y + 4)$.

8 Comme $y + 2|x^2 + 1$ et $x^2 + 1$ impair (car x est pair), donc $y + 2$ est un diviseur impair positif de $x^2 + 1$, par la question 4. on a $y + 2 \equiv 1 \mod (4)$ donc $y \equiv -1 \mod (4)$.

9 On a $y \equiv -1 \mod (4)$ donc $y^2 - 2y + 4 \equiv 1 + 2 = 3 \mod (4)$, or $y^2 - 2y + 4$ est aussi un diviseur impair positif de $x^2 + 1$, donc $y^2 - 2y + 4 \equiv 1 \mod (4)$ contradiction, par suite x, y ne peuvent exister.