Université Mohamed Premier
Faculté Des Sciences - Oujda
Département De Mathématiques et Informatique
Prof. Mustapha CHELLALI

Année universitaire : 2015/2016
Filière : SMIA S1
Module : Algèbre 1
Examen de la Session de Rattrapage

Session de rattrapage d'autonne 2015

http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2
mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II, III, IV, V sont indépendants

I

1 En distinguant les cas $x<1$ et $x \geqslant 1$ montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - x + 1 > 0$$

2 Montrer que l'énoncé suivant est **faux** :

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \big(p \text{ premier} \Longrightarrow 2p+1 \text{ premier}\big)$$

3 Montrer par un raisonnement par distinction des cas que :

$$\forall p \in \mathbb{N}\,(p<19) \quad \big(p \text{ premier} \Longrightarrow 6p+1 \text{ premier}\big)$$

II Soit $n \in \mathbb{N}$ $(n \geqslant 1)$. On note $[1,n] = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant m \leqslant n\}$.

1 Soit $x \in [1,n]$, soit $y = qx$ un multiple de x dans $[1,n]$, montrer que $1 \leqslant q \leqslant n/x$.

2 En déduire que le nombre de multiples de x dans $[1,n]$ est $\leqslant n/x$

3 Montrer que le nombre c_n de couples de $[1,n]$ comparables pour la relation divise est $\leqslant 2n(1+1/2+1/3+\cdots+1/n)$.

4 En déduire que c_n est negligeable devant le nombre de tout les couples de $[1,n]$. (On admettra sans démonstration que : $1+1/2+1/3+\cdots+1/n \leqslant 1+\log(n)$ où $\log(n)$ designe le logarithme naturel de n)

III On pose E un ensemble fini, et $n = |E|$ le nombre d'éléments de E.

1 Soit A, B des sous-ensembles de E. Montrer que :

$$A \cup B = E \Longleftrightarrow A^c \subset B$$

On note $\mathscr{E}(E) = \{(X,Y) \mid X, Y \subset E \; et \; X \cup Y = E\}$ et $\mathscr{E}'(E) = \{(X,Y) \mid X, Y \subset E \; et \; X \subset Y\}$, soit :

$$\begin{aligned} \varphi : \mathscr{E}(E) &\longrightarrow \mathscr{E}'(E) \\ (X,Y) &\longrightarrow (X^c, Y) \end{aligned}$$

2 Montrer que φ est bijective.

3 Soit $x \notin E$, montrer que $\mathscr{E}(E \cup \{x\})$ est la réunion disjointe :

$$\big\{(X \cup \{x\}, Y) \mid (X,Y) \in \mathscr{E}(E)\big\} \bigcup \big\{(X, Y \cup \{x\}) \mid (X,Y) \in \mathscr{E}(E)\big\} \bigcup \big\{(X \cup \{x\}, Y \cup \{x\}) \mid (X,Y) \in \mathscr{E}(E)\big\}$$

4 En déduire que $|\mathscr{E}(E \cup \{x\})| = 3 \times |\mathscr{E}(E)|$.

5 Montrer que $|\mathscr{E}(E)| = 3^n$

6 En déduire que $\left|\mathscr{E}'(E)\right| = 3^n$.

7 Soit $A \subset E$, soit $\mathscr{E}(A) = \{(X,Y) \mid X \cup Y = A\}$, que vaut $|\mathscr{E}(A)|$?

IV Soit $d = \mathrm{pgcd}(1155, 195)$.

1 Calculer d au moyen de la factorisation en nombres premiers.

2 Retrouver d par l'algorithme d'Euclide.

3 Calculer $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $1155u + 195v = d$.

4 Calculer $\mathrm{ppcm}(1155, 195)$

SUITE AU VERSO

V

1 Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \quad 2^{4k} \equiv 1 \mod (3)$.

On définit la suite d'entiers $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2^{u_n} \end{cases}$

$$(u_1 = 2,\ u_2 = u_1^2 = 2^2,\ u_3 = 2^{u_2} = 2^{2^2},\ \ldots)$$

2 Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ on a $u_{n+2} - u_{n+1} = 2^{u_n}(2^{u_{n+1}-u_n} - 1)$.

3 En déduire par récurrence que :

(i) $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant 1) \quad u_{n+1} - u_n > 0$.

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}\ (n \geqslant 1) \quad u_n > n$.

4 Montrer que pour $n \geqslant 2$ on a $4|u_{n+1} - u_n$.

5 En déduire que pour $n \geqslant 3$ on a $6|u_{n+1} - u_n$.

6 Soit $m \in \mathbb{N}$ $(m > 1)$, écrivons $m = 2^k m_1$ avec $m_1, k \in \mathbb{N}$ et m_1 *impair*. On suppose que pour tout $m' < m$ on a pour n assez grand :

$$u_{n+1} \equiv u_n \mod (m')$$

(i) Montrer que pour n assez grand :

$$u_{n+1} \equiv u_n \mod (m_1) \text{ (\textit{remarquer que} } \varphi(m_1) < m\text{)}$$

(ii) En déduire que pour n assez grand :

$$u_{n+1} \equiv u_n \mod (m)$$

7 Déduire de 6. que pour tout $m \in \mathbb{N}$ on a pour n assez grand :

$$u_{n+1} \equiv u_n \mod (m)$$

8 Montrer que pour tout entier $k \in \mathbb{N}$ $(k \geqslant 1)$, les k premiers décimales de u_n se stabilisent (c'est-á-dire deviennent constants à partir d'un certain n).