

Planche n° 27. Fractions rationnelles

* très facile ** facile *** difficulté moyenne **** difficile
I : Incontournable T : pour travailler et mémoriser le cours

Exercice n° 1

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes

1) $\frac{X^2 + 3X + 5}{X^2 - 3X + 2}$	2) $\frac{X^2 + 1}{(X-1)(X-2)(X-3)}$	3) $\frac{1}{X(X-1)^2}$
4) $\frac{X^2 + 1}{(X-1)^2(X+1)^2}$	5) $\frac{1}{(X-2)^3(X+2)^3}$	6) $\frac{X^3}{X^3 - 1}$
7) $\frac{X^6}{(X^3 - 1)^2}$	8) $\frac{1}{X^6 + 1}$	9) $\frac{X^2 + 3}{X^5 - 3X^4 + 5X^3 - 7X^2 + 6X - 2}$
10) $\frac{X^6 + 1}{X^5 - X^4 + X^3 - X^2 + X - 1}$	11) $\frac{X^7 + 1}{(X^2 + X + 1)^3}$	

Exercice n° 2

Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes

1) $\frac{1}{X^n - 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$	2) $\frac{1}{(X-1)(X^n - 1)}$ dans $\mathbb{C}(X)$
3) $\frac{n!}{(X-1)(X-2)\dots(X-n)}$ dans $\mathbb{R}(X)$	4) $\frac{X^2}{X^4 - 2X^2 \cos(2\alpha) + 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$
5) $\frac{1}{X^{2n} + 1}$ dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$.	

Exercice n° 3

Soit U_n l'ensemble des racines n -èmes de l'unité dans \mathbb{C} . Ecrire sous forme d'une fraction rationnelle (ou encore réduire au même dénominateur) $F = \sum_{\omega \in U_n} \frac{\omega X + 1}{\omega^2 X^2 + \omega X + 1}$.

Exercice n° 4

Soit $F = \frac{P}{Q}$ où P et Q sont des polynômes tous deux non nuls et premiers entre eux. Montrer que F est paire si et seulement si P et Q sont pairs. Etablir un résultat analogue pour F impaire.

Exercice n° 5

Calculer la dérivée n -ème de $\frac{1}{X^2 + 1}$.

Exercice n° 6

Trouver tous les polynômes divisibles par leur dérivée.

Exercice n° 7 (Equations réciproques)

Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

1) $z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1 = 0$ en posant $Z = z + \frac{1}{z}$ (ou autrement).

2) $z^6 - 5z^5 + 5z^4 - 5z^2 + 5z - 1 = 0$.

3) $z^7 - z^6 - 7z^5 + 7z^4 + 7z^3 - 7z^2 - z + 1 = 0$.

Exercice n° 8

Soient x_1, \dots, x_8 les zéros de $X^8 + X^7 - X + 3$. Calculer $\sum \frac{x_1}{x_2 x_3}$ (168 termes).