Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année Universitaire 2007-2008

Filière SMIA - Semestre 1

Support du cours d'Analyse I

Professeur : Zine El-Abidine Guennoun

Département de Mathématiques

Faculté des Sciences, 4 Avenue Ibn Battouta B.P. 1014 RP, Rabat–Maroc
Tel +212 (0) 37 77 18 34/35/38, Fax : +212 (0) 37 77 42 61, http://http://fsr.um5.ac.ma/

Table des matières

1

Limites et continuité d'une fonction numérique

1.1 Limite d'une fonction numérique

Définition 1. *Soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle voisinage de a toute partie de $\mathbb{R}$ contenant un intervalle ouvert centré en a.*

$$V \text{ est un voisinage de } a \Leftrightarrow \exists\ \delta > 0 \text{ tel que }]a-\delta, a+\delta[\ \subseteq V.$$

V est un ouvert de R si et seulement si V est un voisinage de chacun de ses points.

$$\forall a \in V,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tel que } \quad]\ a-\delta, a+\delta[\ \subseteq V.$$

Exemple 2. $V =]-1, 2[\cup]5, 8[$ *est un ouvert.*

$$V =]5, 8] \text{ n'est pas voisinage de 8, car } \forall\ \delta > 0\ ,\ \ ]\ 8-\delta, 8+\delta[\ \not\subseteq V.$$

Définition 3. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, $l \in \mathbb{R}$. Soit $a \in I$, I contient un voisinage de a (sauf peut-être a, f peut ne pas être définie en a).*
On dit que f admet l pour limite en a si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I,\ (0 < |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

Proposition 4. *La limite, si elle existe, est unique, c-à-d , si f admet l, l_1 pour limites en a alors $l = l_1$.*

Preuve.
Supposons que f admette deux limites l, l_1 en a, telles que $l \neq l_1$. Soit $\varepsilon > 0$, il existe δ_1,δ_2 tels que

$$(0 < |x-a| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l_1| \leq \varepsilon)), \qquad (1)$$

et

$$(0 < |x-a| \leq \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l_2| \leq \varepsilon). \qquad (2)$$

Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Si $0 < |x-a| \leq \delta$ alors (1) et (2) sont vérifiés, par conséquent

$$|l_1 - l_2| = |l_1 - f(x) + f(x) - l_2| \leq |f(x) - l_1| + |f(x) - l_2| \leq 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0.$$

Si on pose $\varepsilon = \dfrac{|l_1 - l_2|}{4} > 0$, on obtient

$$|l_1 - l_2| \leq 2\frac{|l_1 - l_2|}{4} = \frac{|l_1 - l_2|}{2}.$$

Contradiction ! donc $l = l_1$. On note alors $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

Exemples 5.

(1) En utilisant la définition, montrer que $\lim_{x\to 2} 4x+1=9$.

Soit $\varepsilon>0$, donc $|f(x)-9|=|4x+1-9|=|4x-8|=4\,|x-2|<\varepsilon$? Il suffit de prendre $\delta=\dfrac{\varepsilon}{4}$, en effet

$$|x-2|<\delta=\frac{\varepsilon}{4}\Rightarrow|f(x)-9|<\varepsilon.$$

(2) En utilisant la définition, montrer $\lim_{x\to 2}(x^2-4x+7)=3$.

Soit $\varepsilon>0$, $|f(x)-3|=\left|x^2-4x+7-3\right|=\left|x^2-4x+4\right|=\left|(x-2)^2\right|<\varepsilon$? Il suffit de prendre : $\delta=\sqrt{\varepsilon}$ (à vérifier).

(3) En utilisant la définition, montrer $\lim_{x\to 2} x^2=4$.

Soit $\varepsilon>0$, $|f(x)-4|=\left|x^2-4\right|=|(x-2)\,(x+2)|<\varepsilon$?
Dans ce cas, on ne peut pas majorer directement $|(x-2)|$ par une constante qui ne dépend pas de x car $(x+2)$ dépend de x. On restreint l'étude à un intervalle centré en 2. Par exemple : on prend $x\in\,]2-1,2+1[\,=\,]1,3[$,et dans ce cas

$$|x+2|\le|x|+2\le 3+2=5$$

et

$$|f(x)-4|\le 5\,|x-2|\le\varepsilon.$$

Il suffit de prendre $\delta=\min(1,\dfrac{\varepsilon}{5})$, car $x\in\,]2-1,2+1[$.

(4) En utilisant la définition, montrer que si $a>0$, alors $\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$.

Soit $\varepsilon>0$,

$$\left|\sqrt{x}-\sqrt{a}\right|=\left|\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}\right|=\frac{|x-a|}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})}<\frac{|x-a|}{\sqrt{a}},$$

car $\sqrt{x}>0$.
Il suffit de prendre $\delta=\varepsilon\sqrt{a}$, (terminer la preuve).

Exercice 6. *En utilisant la définition, montrer*

$$\lim_{x\to a}x^n=a^n,\qquad n\in\mathbb{N}.$$

Utiliser l'identité

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+....+a^{n-1}).$$

Proposition 7. *Si une fonction $f:I\to\mathbb{R}$ admet une limite l en a alors f est bornée sur un voisinage V de a. (c-à-d $\exists M>0$ tel que $|f(x)|\le M$ au voisinage de a).*

Preuve. On a $\lim_{x\to a}f(x)=l$ si et seulement si

$$\forall\epsilon>0,\ \exists\delta>0\ \forall x\in I,\quad 0<|x-a|\le\delta\Rightarrow|f(x)-l|\le\varepsilon.$$

On prend $\varepsilon=1$, donc

$$\exists\delta>0\ \ \forall x\in I,(0<|x-a|\le\delta\Rightarrow|f(x)-l|\le 1\Rightarrow|f(x)|\le|l|+1,$$

car

$$|f(x)|-|l|\le|f(x)-l|\le 1.$$

Par conséquent, si on prend le voisinage $V=\,]\,a-\delta,a+\delta[\,\cap I$; on a $|f(x)|\le|l|+1,\forall x\in V$, d'où f est bornée sur un voisinage V de a.

1.2 Limite à droite et à gauche d'une fonction numérique.

Définition 8.

(1) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, $l \in \mathbb{R}$. Soit $a \in I$;
I étant un voisinage de a. On dit que f admet l pour *limite à droite* en a si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I, \ (a < x \leq a + \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

On note

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = l.$$

(2) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique, $l \in \mathbb{R}$. Soit $a \in I$, alors I étant un voisinage de a.
On dit que f admet l pour *limite à gauche* en a si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I, \ (a - \delta \leq x < a \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon).$$

On note

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = l.$$

Proposition 9. *La fonction f admet l pour limite en a si et seulement si*

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = l.$$

Exemple 10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x}$ *n'existe pas, car* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{x}{-x} = -1 \end{cases}$.

Proposition 11. *$f : I \to R$ est une fonction numérique. $a, l \in \mathbb{R}$, et C une constante. On a*

$$\lim_{x \to a} C = C \qquad (\textit{à vérifier}).$$

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ alors

$$\lim_{x \to a} Cf(x) = Cl.$$

Preuve.
Si $C = 0$ alors $0f = 0$ tend vers $0 = 0l$.
Si $c \neq 0$, soit $\epsilon > 0$, on pose $\epsilon' = \dfrac{\epsilon}{|C|} > 0$, puisque $lim_{x \to a} f(x) = l$ alors

$$\exists \delta > 0 \ \forall x \in I, \ 0 < |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \frac{\epsilon}{|C|} \Rightarrow |C| \, |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

Donc

$$0 < |x - a| \leq \delta \Rightarrow |Cf(x) - Cl| \leq \varepsilon \text{ et donc } \lim_{x \to a} Cf(x) = Cl.$$

Ce résultat reste valable si on remplace $\lim\limits_{x \to a}$ par $\lim\limits_{x \to a^+}$ ou $\lim\limits_{x \to a^-}$.

Théorème 12 (Théorème d'encadrement)**.** *Soient $f, g, h : I \to \mathbb{R}$ des fonctions numériques, $l \in \mathbb{R}$.*
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l$ et $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisnage de a alors g admet l pour limite en a, c'est à dire $\lim\limits_{x \to a} g(x) = l$.
Ce résultat reste valable si on remplace $\lim\limits_{x \to a}$ par $\lim\limits_{x \to a^+}$ ou $\lim\limits_{x \to a^-}$.

Preuve.
Soit $\varepsilon > 0$, il existe δ_1,δ_2 tels que :

$$(0 < |x - a| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon \leq f(x) \leq l + \varepsilon)) \qquad (1)$$

et

$$(0 < |x-a| \leq \delta_2 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon \leq h(x) \leq l + \varepsilon)). \qquad (2)$$

De plus, il existe $\delta_0 > 0$ tel que

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \qquad (3)$$

si $|x-a| \leq \delta_0$; car $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisnage de a.

Si on pose $\delta = \min(\delta_0,\ \delta_1,\delta_2)$ on a alors $0 < |x-a| \leq \delta \Rightarrow (1), (2)$ *et* (3) sont vérifiés.

Donc

$$l - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq h(x) \leq l + \varepsilon \Rightarrow l - \varepsilon \leq g(x) \leq l + \varepsilon \Leftrightarrow |g(x) - l| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$.

Exemples 13.

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \sin(x) = 0$. En effet $-|x| \leq \sin(x) \leq |x|$ au voisinage de 0, et $\lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$. En effet, $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = \lim\limits_{x\to 0} \sqrt{1 - \sin^2(x)} = 1$.

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sin x} = 1$. En effet, si $x > 0$ on a

$$\sin x \leq x \leq \tan x \Rightarrow 1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}, \text{ et } \lim_{x\to 0^+} 1 = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cos x} = 1$$

et donc d'après le théorème 12, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sin x} = 1$. De même, si $x < 0$, on a $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{\sin x} = 1$. On conclut que

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1.$$

Conséquences 14.

(1)

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Preuve.

($\Rightarrow$) Il suffit de remarquer que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, que $\lim\limits_{x\to a} -|f(x)| = \lim\limits_{x\to a} |f(x)| = 0$ et utiliser le théorème d'encadrement 12.

($\Leftarrow$) Vérifier en utilisant la définition.

(2)

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x\to a} (f(x) - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x) - l| = 0.$$

Preuve. Utiliser la définition.

(3) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et g est bornée au voisinage de a alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

Preuve. La fonction g est bornée au voisinage de a, alors il existe $M > 0$ tel que $0 \leq |g(x)| \leq M$ pour tout x dans ce voisinage. En multipliant par $|f(x)|$, on trouve $0 \leq |f(x)g(x)| \leq M\,|f(x)|$, d'où $\lim\limits_{x\to a} M\,|f(x)| = M0 = 0$. D'après le théorème 12, on a $\lim\limits_{x\to a} |f(x)g(x)| = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

(4) Ces résultats restent valables si on remplace $\lim\limits_{x\to a}$ par $\lim\limits_{x\to a^+}$ ou $\lim\limits_{x\to a^-}$.

$$\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x}) = 0 \text{ car } \left|\sin(\frac{1}{x})\right| \leq 1 \text{ et } \lim_{x\to 0} x = 0.$$

1.3 Opérations sur les limites

Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ des fonctions numériques et soient l, $l_1 \in \mathbb{R}$, respectivement, les limites de f et g en a. C'est à dire

$$\lim_{x\to a} f(x) = l \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} g(x) = l_1.$$

(1) On a

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |l|.$$

Preuve.
Il suffit de remarquer que $|\ |f(x)| - |l|\ | \leq |f(x) - l|$ et utiliser la définition.

(2) On a

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = l + l_1.$$

Preuve.
Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$; alors il existe δ_1 et δ_2 tels que

$$0 < |x - a| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

et

$$0 < |x - a| \leq \delta_2 \Rightarrow |g(x) - l_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

Posons $\delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$. Donc pour $0 < |x - a| \leq \delta$ les propositions (1) et (2) sont vraies et par conséquent

$$|f(x) + g(x) - (l + l_1)| \leq |f(x) - l| + |g(x) - l_1| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

D'où

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = l + l_1.$$

(3) On a

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = ll_1.$$

Preuve.
On a

$$0 \leq |f(x)g(x) - (ll_1)| = |f(x)(g(x) - l_1) + l_1(f(x) - l)| \leq |f(x)|\,|g(x) - l_1| + |l_1|\,|f(x) - l|.$$

Puisque $\lim_{x\to a} |l_1|\,|f(x) - l| = 0$, alors f est borné au voisinage de a et donc $\lim_{x\to a} |f(x)|\,|g(x) - l_1| = 0$ (proposition du cours). Par conséquent

$$\lim_{x\to a} (|f(x)|\,|g(x) - l_1| + |l_1|\,|f(x) - l|) = 0$$

d'où d'après Théorème 12

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x) = ll_1.$$

Remarque. On peut aussi utiliser la définition pour montrer le résultat. En effet, f est borné au voisinage de a, alors $\exists M > 0$; $|f(x)| \leq M$ au voisnage de a. Soit $\varepsilon > 0$, on pose $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{M + |l_1|} > 0$ et $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$.
(Preuve à terminer).

(4) On a pour $l_1 \neq 0$.

$$\lim_{x\to a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{l_1}.$$

Preuve.
On a $\lim_{x\to a} g(x) = l_1 \neq 0$, donc $\lim_{x\to a} |g(x)| = |l_1| > 0$.

On pose $\varepsilon = \dfrac{|l_1|}{2} > 0$, alors

$$\exists \delta > 0,\ 0 < |x-a| \leq \delta \Rightarrow ||g(x)| - |l_1|| \leq \frac{|l_1|}{2} \Longleftrightarrow -\frac{|l_1|}{2} \leq |g(x)| - |l_1| \leq \frac{|l_1|}{2}.$$

Par conséquent $0 < |x-a| \leq \delta \Rightarrow \dfrac{|l_1|}{2} \leq |g(x)|$ et donc $\dfrac{1}{|g(x)|} \leq \dfrac{2}{|l_1|}$.

Montrons maintenant que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{l_1}$:

On a

$$0 \leq \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{l_1}\right| = \left|\frac{l_1 - g(x)}{g(x)l_1}\right| \leq \frac{2}{|l_1|^2}\,|l_1 - g(x)|\,.$$

Au voisinage de a, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{2}{|l_1|^2}\,|l_1 - g(x)| = 0$, Donc d'après le théorème d'encadrement 12,

$\lim\limits_{x\to a} \left|\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{l_1}\right| = 0$, et donc $\lim_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{l_1}$ si $l_1 \neq 0$.

Comme coséquence de (3) et (4), on obtient

(5) Pour $l_1 \neq 0$. on a

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{l_1}.$$

Ces résultats restent valables si on remplace $\lim\limits_{x\to a}$ par $\lim\limits_{x\to a^+}$ ou $\lim\limits_{x\to a^-}$.

Exemples 15.

(1) On considère la fonction polynomiale

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots.. + a_0.$$

Alors

$$\begin{array}{rcl}
\lim\limits_{x\to a} f(x) & = & \lim\limits_{x\to a} (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots.. + a_0) \\
& = & \lim\limits_{x\to a} a_n x^n + \lim\limits_{x\to a} a_{n-1}x^{n-1} + \ldots.. + \lim\limits_{x\to a} a_0 \\
& = & \lim\limits_{x}(a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots.. + a_0) = f(a).
\end{array}$$

(2) On considère la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots.. + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots.. + b_0}.$$

Alors $$\begin{array}{rcl}
\lim_{x\to a} f(x) & = & \dfrac{a_n a^n + a_{n-1}a^{n-1} + \ldots.. + a_0}{b_m a^m + b_{m-1}a^{m-1} + \ldots.. + b_0} \quad \text{si } b_m a^m + b_{m-1}a^{m-1} + \ldots.. + b_0 \neq 0. \\
& = & f(a)
\end{array}$$

(3) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ alors

$$\left\{\begin{array}{l}
\lim\limits_{x\to a} (f(x)^n) = l^n, \\
\lim\limits_{x\to a} \sqrt{|f(x)|} = \sqrt{|l|}, \\
\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{|f(x)|} = \sqrt[n]{|l|}.
\end{array}\right. \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

(4) On a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{x} = \lim_{x\to 0} 5\frac{\sin(5x)}{5x} = 5 \lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = 5.1 = 5.$$

En général, on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a; \qquad \forall a \in \mathbb{R}.$$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x}=0$, en effet,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos(x))(1+\cos(x))}{x(1+\cos(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^2(x))}{x(1+\cos(x))}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x))}{x(1+\cos(x))}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin(x))}{x}\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin(x))}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos(x))}\\ &= 1\times\frac{0}{2}=0\end{aligned}$$

Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$.

1.4 Limite quand la variable tend vers l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$)

1.4.1 Définitions

(i)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=l \Longleftrightarrow (\forall\epsilon>0,\ \exists B>0\quad \forall x\in I,\ x\geq B\Rightarrow |f(x)-l|\leq\varepsilon)\,.$$

(ii)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=l \Leftrightarrow (\forall\epsilon>0, \exists B<0\quad \forall x\in I,\ x\leq B\Rightarrow |f(x)-l|\leq\varepsilon).$$

Dans ce cas, on obtient une asymptote horizontale $y=l$.

(iii)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Longleftrightarrow (\forall A>0, \exists B>0\quad \forall x\in I,\ x\geq B\Rightarrow f(x)\geq A)\,.$$

(iv)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty \Longleftrightarrow (\forall A<0, \exists B>0\quad \forall x\in I,\ x\geq B\Rightarrow f(x)\leq A)\,.$$

Dans ce cas, on obtient une branche parabolique qui tend vers l'infini. Pour déterminer la direction, on calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Si $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ existe alors la branche a une direction déterminée par la droite $y=ax$.
Si , de plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b$ alors la droite $y=ax+b$ est une asymptote oblique.

Exemples 16.

(1) On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$. Pour la démontrer, il suffit de prendre $B=\dfrac{1}{\varepsilon}$. De même on prouve que $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x}=0$.

(2) Si $k>0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^k}=0$. Il suffit de prendre $B=\sqrt[k]{\dfrac{1}{\varepsilon}}$.

(3)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+.....+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+.....+b_0}=\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_n}{b_m}x^{n-m}=\left(signe\dfrac{a_n}{b_m}\right)\infty,\text{si } n>m;\\ \dfrac{a_n}{b_m}\text{ si } n=m;\\ 0\text{ si } n<m.\end{cases}.$$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3+5x^2-7x+2}{-x^2+20}=-\infty$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5-x^3+5x^2-7x+2}{7x^5+x^4-x^2+20}=\dfrac{3}{7}$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^5-x^3+5x^2-7x+2}{7x^6+x^4-x^2+20}=0$.

1.5 Limite infinie en un point.

1.5.1 Définitions

(1)

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in I, (0 < |x-a| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A).$$

(2)

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in I, (a < x \leq a+\delta \Rightarrow f(x) \geq A).$$

(3)

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0, \exists \delta > 0 \;\; \forall x \in I, (a-\delta \leq x < a \Rightarrow f(x) \geq A).$$

Dans ce cas la droite $x = a$ est une asymptote verticale.

Exemple 17.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \qquad et \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

1.5.2 Les formes indéterminées : $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty - \infty$; 0^0; ∞^0; 1^∞.

Il existe certaines formes de limite où il est n'est pas possible de conclure directement en utilisant des opérations sur les limites, ce sont les formes dites "indéterminées". Pour lever l'indétermination, il existe de nombreuses techniques : procédés algébriques (factorisation) ou analytiques (utilisation de la dérivée ou du développement limité ; voir le chapitre suivant).

La forme indéterminée $\frac{0}{0}$

Cas des fonctions rationnelles. Une fonction f est dite rationnelle si elle est quotient de deux polynômes ; c'est à dire $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(a) = Q(a) = 0$ alors le calcul direct de la limite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ nous donne "$\frac{0}{0}$". Pour lever l'indétermination, on utilise les propriétés algébriques des polynômes : En effet, puisque $P(a) = Q(a) = 0$ alors il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$P(x) = (x-a)^p P_1(x) \qquad \text{et} \qquad Q(x) = (x-a)^q Q_1(x)$$

avec $P_1(a) \neq 0$ et $Q_1(a) \neq 0$. Donc

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{P_1(a)}{Q_1(a)} \lim_{x\to a} (x-a)^{p-q} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p > q \\ \frac{P_1(a)}{Q_1(a)} & \text{si} \quad p = q \\ \infty & \text{si} \quad p < q. \end{cases}$$

Exemple 18. *On a* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1} = \text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$, *et puisque*

$$x^2+x-2 = (x-1)(x+2) \qquad et \quad x^2-1 = (x-1)(x+1),$$

alors

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+1} = \frac{3}{2}.$$

Cas des fonctions avec des racines n-ème. Lorsqu'il existe, dans le quotient, des racines n-ème, l'idée est de transférer l'indétermination à une fonction rationnelle pour utiliser la technique précédente. Le transfert se fait, en général en multipliant numérateur et dénominateur par une quantité conjuguée. Par exemple on veut calculer

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3x^2-2}-1}{\sqrt{x}-1} \qquad \left(= \text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right)$$

Pour lever l'indétermination on fait la technique suivante : on sait que

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \qquad \text{et} \qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

donc

$$\sqrt[3]{3x^2-2} - 1 = \frac{\left(\sqrt[3]{3x^2-2} - 1\right)\left(\sqrt[3]{(3x^2-2)^2} + \sqrt[3]{3x^2-2} + 1\right)}{\sqrt[3]{(3x^2-2)^2} + \sqrt[3]{3x^2-2} + 1} = \frac{3(x^2-1)}{\sqrt[3]{(3x^2-2)^2} + \sqrt[3]{3x^2-2} + 1}$$

et

$$\sqrt{x} - 1 = \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{3x^2-2} - 1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{3(x+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[3]{(3x^2-2)^2} + \sqrt[3]{3x^2-2} + 1} = 4.$$

La forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$

Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et soient u et v deux fonctions telles que

$$\lim_{x\to a} |u(x)| = \lim_{x\to\infty} |v(x)| = \infty$$

alors la limite de la fonction $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ a la forme indéterminée "$\frac{\infty}{\infty}$". Pour lever l'indétermination on peut utiliser les même méthodes comme dans la forme indéterminée "$\frac{0}{0}$" car

$$\text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”} = \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \lim_{x\to a} \frac{\frac{1}{v(x)}}{\frac{1}{u(x)}} = \text{“}\frac{0}{0}\text{”}.$$

Exemple 19. *Calculons la limite*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x-1}{2x^3-1}.$$

*Alors cette limite a la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Pour lever l'indétermination on peut utiliser la règle donnée dans **Exemples 16** ou bien une autre méthode, par exemple : on pose $y = \frac{1}{x}$ donc*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+3x-1}{2x^3-1} = \lim_{y\to 0} \frac{1+3y^2-y^3}{2-y^3} = \frac{1}{2}.$$

La forme indéterminée $\infty - \infty$

On peut lever cette indétermination en utilisant les méthodes analogues comme pour les formes précédentes. En effet, soit $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et soient u et v deux fonctions telles que

$$\lim_{x\to a} |u(x)| = \lim_{x\to a} |v(x)| = \infty$$

Alors la fonction $f(x) = |u(x)| - |v(x)|$ a la forme indéterminée $\infty - \infty$. Donc, calculons la limite

$$\lim_{x\to a} \frac{|u(x)|}{|v(x)|}.$$

Remarquez que cette limite a la forme indétérminée "$\frac{\infty}{\infty}$" donc pour lever cette indétermination on utilise ce qui précéde.

Cas 1. Si $\lim\limits_{x\to a} \frac{|u(x)|}{|v(x)|} = \ell \neq 1$ alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} |v(x)| \left(\frac{|u(x)|}{|v(x)|} - 1\right) = (\ell - 1) \lim_{x\to a} |v(x)| = \infty.$$

Cas 2. Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{|u(x)|}{|v(x)|}=1$ alors la limite de f ayant la forme indt́erminée "$\frac{0}{0}$" car

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\lim_{x\to a}\frac{\frac{|u(x)|}{|v(x)|}-1}{\frac{1}{|v(x)|}} \qquad \left(=\text{"}\frac{0}{0}\text{"}\right).$$

Donc on peut utiliser les techniques de l'indétermination " $\frac{0}{0}$" indiquées ci-dessus.

Exemple 20. *Calculons la limite*

$$\lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x^3-1}.$$

Il s'agit de la forme indéterminée $+\infty-\infty$*. Donc puisque*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{\sqrt{x^3-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}}}=+\infty\neq 1$$

alors (Cas 1.) nous montre que

$$\lim_{x\to+\infty} x^2-\sqrt{x^3-1}=+\infty.$$

Exemple 21. *Calculons la limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2x}.$$

Puisque

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2x}}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2x}}=1$$

alors il s'agit du (Cas 2.). Donc en multipliant numérateur et dénominateur par la conjuguée :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2+2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}-2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{2}{x}}}=\frac{-2}{2}=-1.$$

Les autres formes indéterminées

Les autres formes indéterminées se ramènent aux deux premières indéterminations "$\frac{0}{0}$" et "$\frac{\infty}{\infty}$". Par exmeple :

L'indétermination $0\times\infty$ se ramène à la forme indéterminée " $\frac{\infty}{\infty}$" car "$0\times\infty=\frac{1}{\infty}\times\infty=\frac{\infty}{\infty}$".

Les indéterminations "0^0", "1^∞" et "$+\infty^0$" se ramènent au cas "$0\times\infty$" en utilisant les fonctions logarithme (ln) et exponentielle (exp) que nous allons définir dans le chapitre 2.

1.5.3 Composition des limites.

Proposition 22.

Soient $f: I\to\mathbb{R}$ et $g: J\to\mathbb{R}$ et soit $f(I)\subset J$. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ et $\lim\limits_{y\to b} g(y)=l$ alors

$$\lim_{x\to a} g\left(f(x)\right)=l.$$

Preuve. Soit $\varepsilon>0$, alors puisque $\lim_{y\to b} g(y)=l$, il existe $\delta>0$ tel que :

$$0<|y-b|\le\delta\Rightarrow|g(y)-l|\le\varepsilon \qquad (1)$$

et puisque $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$, alors il existe $\delta_1>0$ tel que

$$0<|x-a|\le\delta_1\Rightarrow|f(x)-b|\le\delta \qquad (2)$$

Par conséquent, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\delta_1 > 0$ tel que

$$0 < |x-a| \leq \delta_1 \Rightarrow |f(x)-b| \leq \delta \Rightarrow |g(f(x)-l| \leq \varepsilon.$$

C-à-d

$$\lim_{x\to a} g\left(f(x)\right) = l.$$

Exemple 23.

$$\lim_{x\to 4} \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) = \lim_{y\to \frac{\pi}{4}} \tan(y) = 1,$$

car

$$\lim_{x\to 4} \frac{\pi}{x} = \frac{\pi}{4}.$$

1.6 Continuité d'une fonction numérique.

1.6.1 Définition

Continuité en un point

Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. On dit que la fonction est continue en a si et seulement si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \forall x \in I, \quad \left(0 < |x-a| \leq \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| \leq \varepsilon\right).$$

La fonction f est continue en $a \Leftrightarrow \begin{cases} f(a) \text{ existe, } a \text{ appartient au domaine de } f; \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a). \end{cases}$

Discontinuité

On dit que f est discontinue en a si f n'est pas continue en a.

Discontinuité de première espèce : La fonction f n'est pas continue en a même si

$$\lim_{x\to a^+} f(x) \text{ existe} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a^-} f(x) \text{ existe.}$$

On appelle alors $\varsigma_f(a) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) - \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ le saut de f en a.
La fonction f est continue en a si et seleument si $\varsigma_f(a) = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Si la fonction f n'est pas continue en a et la discontinuité n'est pas de première espèce alors f admet une discontinuité de deuxième espèce.

Continuité globale : Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$. On dit que la fonction f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout point de I.
On note $C(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Continuité sur un intervalle $[a, b]$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, On dit que la fonction f est continue sur $[a, b]$ si et seulement si

$$\begin{cases} \text{la fonction } f \text{ est continue sur } \;]a, b[\; \text{ ouvert} \\ \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a) \\ \lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b). \end{cases}$$

Proposition 24.

(1) Si f est continue en a alors f est borné au voisinage de a.

(2) La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en a si et seulement si pour toute suite (x_n) d'éléments de I convergente vers a ; on a $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

La preuve de **(1)** découle immédiatement de la propsition sur les limites.
Preuve de (2).

$(\Longrightarrow)$ La fonction f est continue en a, donc $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$; soit $\epsilon > 0$, alors

$$\exists \delta > 0 \; \forall x \in I, (0 < |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon).$$

Soit maintenant (x_n) une suite telle que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| \leq \delta.$$

Donc, pour $\epsilon > 0$, $\exists N$ tel que

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

$(\Longleftarrow)$ Supposons que f n'est pas continue en a, $f(x)$ n'admet pas $f(a)$ pour limite en a. On a alors la négation de la proposition suivante

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \; \forall x \in I, \quad (0 < |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon),$$

qui est

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0 \; \exists x \in I, \quad (0 < |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| > \varepsilon).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\delta = \dfrac{1}{n}$, alors

$$\exists x_n \in I, \; (0 < |x_n - a| \leq \frac{1}{n} \Rightarrow |f(x_n) - f(a)| \varepsilon).$$

On obtient alors une suite (x_n) d'éléments de I convergente vers a; mais $f(x_n)$ ne converge vers $f(a)$. Contradiction avec l'hypothèse, donc la fonction f est continue en a.

Exemples 25.

(1) On a démontré que $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$; alors la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est continue sur $[0, \infty[$.

(2) On a $\lim\limits_{x\to a} x^n = a^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$; alors la fonction $f(x) = x^n$ est continue sur $\mathbb{R}$. En général, Les fonctions polynomiales $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_0$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

(3) Les fonctions sin et cos sont continues sur $\mathbb{R}$.

1.6.2 Opérations algébriques sur les applications continues.

Propositions

Soient $a \in I$, $C \in \mathbb{R}$, et $f, g : I \to \mathbb{R}$.

(1) Si f est continue en a, alors la fonction $|f|$ est continue en a.

(2) Si f et g sont continues en a alors $f + g$ est continue en a.

(3) Si f est continue alors Cf est continue.

(4) Si f et g sont continues alors fg est continue en a.

(5) Si g est continue en a et si $g(a) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{g}$ est continue en a.

(6) Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

Les preuves sont analogues aux démonstrations des propositions conçernant les opérations algébriques sur les limites.

Si on remplace "continue en a" par "continue sur I," les résultats restent valables. Notez qu'il fallait remplacer " $g(a) \neq 0$" par "$g(x) \neq 0$, $\forall x \in I$".

Composition des fonctions continues.

Proposition 26. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ et $f(I) \subset J$. Si f est continue en a, et g est continue en $f(a)$ alors $g \circ f$ est continue en a.*

Théorème 27 (Théorème des valeurs intermédiaires.)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. Alors, pour toute valeur $\omega \in f([a, b])$ il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \omega$.*

Exemple 28. *Si $f(a) \leq f(b)$ et $f(a) \leq \omega \leq f(b)$, il existe au moins un $c \in [a, b]$ telque $f(c) = \omega$.*

Preuve. Si $a = b$ ou $f(a) = f(b)$, le résultat est trivial.
Supposons (sans perte de généralité) que $a < b$, $f(a) < f(b)$ et que $f(a) \leq \omega \leq f(b)$. Si $f(a) = \omega$ ou $f(b) = \omega$, on a le résultat. Supposons que $f(a) < \omega < f(b)$; On considère l'ensemble

$$B = \{x \in [a, b], f(x) \leq \omega\},$$

B est non vide car $a \in B$ et majoré par b. Donc, d'après les propriétés de $\mathbb{R}$, l'ensemble B admet une borne supérieure c. D'après la caractérisation de la borne supérieure, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in B$ tel que

$$c - \frac{1}{n} < x_n \leq c \qquad (1)$$

Puisque $c < b$, il exite $y_n \notin B$ (c-àd $\omega < f(y_n)$), tel que

$$c < y_n \leq c + \frac{1}{n} \qquad (2)$$

D'après (1), (2) et le théorème d'encadrement, on a

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = c.$$

La fonction f est continue, donc

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(c) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(c).$$

De plus, $f(x_n) \leq \omega < f(y_n)$, en passant à la limite, on obtient $f(c) \leq \omega \leq f(c)$, donc $f(c) = \omega$, alors il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \omega$.

Conséquences

Proposition 29. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$ *telle que* $f(a) \times f(b) < 0$, *alors il existe au moins un* $c \in [a, b]$ *tel que* $f(c) = 0$.

Preuve. Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, 0 est donc compris entre $f(a)$ et $f(b)$. D'où il reste que d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.

Exemples 30.

(1) L'équation $4x^3 + 3x - 3 = 0$ admet au moins une racine réelle entre 0 et 1. En effet, f est continue sur $[0, 1]$, on a $f(0) = -3$ et $f(1) = 4$ donc $f(0) \times f(1) < 0$. D'après la proposition il existe un $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = 0$.

(2) Tout polynome $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$ de degré impaire, $n = 2k + 1$ admet au moins une racine réelle. En effet, P est continue sur $\mathbb{R}$. Supposons que $a_n > 0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = -\infty$; alors il existe x_0 tel que $P(x_0) < 0$. On a aussi, $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$, alors il existe x_1 tel que $P(x_1) > 0$ et donc d'après le théorème des valeurs intérmidiaires, il existe c entre x_0 et x_1 tel que $P(c) = 0$.

(3) L'équation $x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 6x^2 = 6$ admet au moins une solution réelle (à vérifier).

Théorème 31. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue sur* $[a, b]$. *Alors*

(i) *La fonction* f *est bornée sur* $[a, b]$, *c-à-d,* $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ *et* $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ *existent.*

(ii) *La fonction* f *atteint ses bornes, c-à-d, il existe* $x_1, x_2 \in [a, b]$ *tels que* $f(x_1) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ *et* $f(x_2) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

(iii) *L'image* $f([a, b]) = [f(x_1), f(x_2)]$ *est un intervalle fermé*

Exemples 32.

(1) La fonction $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Donc

$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1, 1].$$

(2) La fonction *cos* : $[0, \pi] \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, décriossante sur $[0, \pi]$ et

$$\cos(\pi) = -1 \quad \text{et} \quad \cos(0) = 1,$$

Donc, de la même manière, on démontre que

$$f([0, \pi]) = [-1, 1].$$

(3) La fonction $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, 1[$ mais elle n'est pas bornée sur $]0, 1[$. Pourquoi ?

(4) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$. S'il existe au moins un $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$, est-ce que $f(a) \times f(b) < 0$? (Donner un contre-exemple.)

1.6.3 Prolongement par continuité

Définition 33. *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$, $a \in I$ *et* f *une fonction définie sur* $I\backslash\{a\}$ *; si* $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ *existe. On peut polonger* f *par continuité en* a.

On appelle prolongement par continuié de f *au point* a, *la fonction définie par*

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in I\backslash\{a\} \\ \lim\limits_{x\to a} f(x) & si \quad x = a. \end{cases}$$

Exemple 34. *La fonction* $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ *n'est pas définie au point* $a = 3$, *car*

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = 6.$$

On peut prolonger la fonction f *par*

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & si \quad x \in \mathbb{R}\backslash\{3\} \\ 6 & si \quad x = 3 \end{cases}$$

La fonction g *est continue au point* 3 *et puisque* f *est continue sur* $\mathbb{R}\backslash\{3\}$, *la fonction* g *est continue sur* $\mathbb{R}$.

1.7 Exercices

Exercice 1.

Calculer, en cas d'existence, les limites suivantes

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(3x)}{\sin(x)}$, **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^3(x)}{\frac{\pi}{2}-x}$, **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{2\sqrt{x+\frac{1}{4}}-1}$,

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$, **(e)** $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\tan(x)\cos(x)$, **(f)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} x\cot(x)$,

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)}{\sqrt{|x|+1}-1}$, **(h)** $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt[3]{x}+x^2}{\sqrt{x}+x^3}$, **(i)** $\displaystyle\lim_{x\to \infty} \frac{x^2\sin(x)-1}{x}$,

Exercice 2.

Etudier la continuité en 0 des fonctions suivantes

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)-x}{x^3} & \text{si} \quad x > 0 \\ -\frac{1}{6} & \text{si} \quad x = 0 \\ \dfrac{\sin\left(\frac{x}{12}\right)}{1-\cos\left(\sqrt{-x}\right)} & \text{si} \quad x < 0. \end{cases}$ **(b)** $g(x) = \begin{cases} (1-x)\sin\left(\frac{1}{1-x}\right) & \text{si} \quad x > 1 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 1. \end{cases}$

Exercice 3.

Montrer que les fonctions suivantes admettent un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$

(a) $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ **(b)** $g(x) = \dfrac{f(x)-1}{x^2}$ **(c)** $h(x) = \dfrac{g(x)+\frac{1}{6}}{x^2}$.

Exercice 4.

Soit $t \in \mathbb{R}^+$, on considère sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$(E): \qquad x^3 + tx - 1 = 0.$$

(1) Montrer que l'équation (E) admet une solution unique, notée $x_0(t)$, sur $[0, 1]$.

(2) Montrer que

$$\lim_{t\to 0^+} x_0(t) = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{t\to +\infty} tx_0(t) = 1.$$

(3) Soit $t > t' > 0$, montrer que

$$x_0^3(t') - x_0^3(t) > t'\left(x_0(t) - x_0(t')\right)$$

et déduire que $t \mapsto x_0(t)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

(4) Déduire que la fonction $t \mapsto x_0(t)$ ne s'annulle pas sur $\mathbb{R}^+$.

2

Dérivabilité et fonctions réciproques

2.1 Dérivation d'une fonction numérique

Définition 35. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$, et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si et seulement si la limite*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe et est finie, on note cette limite $f'(a)$ et on l'appelle la dérivée de f en a.

Remarque 36. *Si on pose $x = a + h$, la définition est équivalente à l'existence de la limite*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \in \mathbb{R}.$$

Exemples 37.

(1) La fonction $f(x) = \sqrt{x}$ est une fonction continue sur$[0, \infty[$. Soit $a \in [0, \infty[$, alors

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

La limite existe si $a \neq 0$, et donc $f(x) = \sqrt{x}$ est une fonction dérivable sur $]0, \infty[$, et

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(2) La fonction $f(x) = x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = nx^{n-1}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$. En effet,

$$\lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-1}a + x^{n-2}a^2 + .. + a^{n-1})}{x-a} = na^{n-1}.$$

Proposition 38. *Si la fonction f est dérivable en a alors f est continue en a.*

Preuve. Il faut montrer que la $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ ou $\lim_{x\to a}(f(x) - f(a)) = 0$.
On a

$$f(x) - f(a) = (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

donc

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a)) = \lim_{x\to a}(x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = 0 \times f'(a) = 0.$$

Par conséquent f est continue en a.

Remarque 39. *La réciproque de la proposition n'est pas vraie. Par exemple, la fonction* $f(x) = |x|$ *est continue en* 0*, mais n'est pas dérivable en* 0.

Définition 40. *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$, *et* $a \in I$. *On dit que* f *est dérivable à droite en* a *si et seulement si*

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe et est finie. On note cette limite $f'_d(a)$ *et on l'appelle la dérivée à doite de* f *en* a.

Définition 41. *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$, *et* $a \in I$. *On dit que* f *est dérivable à gauche en* a *si et seulement si*

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe et est finie. On note cette limite $f'_g(a)$ *et on l'appelle la dérivée à gauche de* f *en* a.

Exemple 42.

La fonction $f(x) = |x|$ est dérible à gauche et à droite en 0, car

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1, \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1.$$

Donc,

$$f'_d(0) = 1 \quad \neq \quad f'_g(0) = -1.$$

2.1.1 Opération alébriques des fonctions dérivables en un point.

Théorème 43. *Soient* $f, g : I \to \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables en* $a \in I$. *Alors*

(1) *La fonction* $f + g$ *est dérivable en* a *et* $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.

(2) *Pour tout* $c \in \mathbb{R}$, *la fonction* cf *est dérivable en* a *et* $(cf)'(a) = cf'(a)$.

(3) *La fonction* fg *est dérivable en* a *et* $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.

(4) *Si* $g(a) \neq 0$, *la fonction* $\frac{1}{g}$ *est dérivable en* a *et* $\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$.

(5) *Si* $g(a) \neq 0$, *alors la fonction* $\frac{f}{g}$ *est dérivable en* a *et*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Preuve de (1). On a

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)+g(a+h)-(f(a)+g(a))}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right).$$

Puisque

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right) = f'(a) \quad \text{et} \quad \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right) = g'(a),$$

alors

$$(f+g)'(a) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right) + \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right) = f'(a) + g'(a).$$

Preuve de (2). A vérifier.
Preuve de (3). On a

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{(f(a+h)-f(a))g(a+h)}{h} + \frac{f(a)(g(a+h)-g(a))}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a+h) + f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right).
\end{aligned}$$

Puisque la fonction g est continue en a on a, $\lim_{h\to 0} g(a+h) = g(a)$, en passant à la limite, on obtient

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Preuve de (4). Puisque la fonction g est continue en a et $g(a) \neq 0$, alors $g(x) \neq 0$ au voisinage de a. Donc,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left(\frac{1}{g}\right)(a+h) - \left(\frac{1}{g}\right)(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\frac{g(a)-g(a+h)}{g(a+h)g(a)}}{h} \right) = \lim_{h\to 0} \left(\frac{\frac{g(a)-g(a+h)}{h}}{g(a+h)g(a)} \right)$$

Or, $\lim\limits_{h\to 0} g(a+h) = g(a)$, et par conséquent

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}.$$

Preuve de (5). D'après (3) et (4), on déduit que

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \left(f\frac{1}{g}\right)'(a) &= f'(a)\left(\frac{1}{g}\right)(a) + f(a)\left(\frac{1}{g}\right)'(a) \\
&= f'(a)\left(\frac{1}{g(a)}\right) + f(a)\left(-\frac{g'(a)}{g^2(a)}\right) \\
&= \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.
\end{aligned}$$

Exemples 44.

(1) La fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée en tout point $x \in \mathbb{R}$ est $\cos'(x) = -\sin(x)$. En effet

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)(\cos(h)-1) - \sin(x)\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x)\lim_{h\to 0}\frac{(\cos(h)-1)}{h} - \sin\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} \\
&= \cos(x)\times 0 - \sin(x)\times 1 \\
&= -\sin(x).
\end{aligned}$$

(2) De la même façon on démontre que la fonction sin est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée en tout point x est $\sin'(x) = \cos(x)$.

(3) La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\cos(x)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\ , k \in \mathbb{Z}\right\}$ et sa dérivée est

$$\left(\frac{1}{\cos}\right)'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\tan(x)}{\cos(x)}.$$

(4) La fonction $\dfrac{1}{\sin}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et sa dérivée est

$$\left(\frac{1}{\sin}\right)'(x) = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{\cot(x)}{\sin(x)}.$$

(5) La fonction *tan* est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et sa dérivée est

$$\left(\frac{\sin}{\cos}\right)'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x).$$

(6) La fonction $\cot = \dfrac{\cos}{\sin}$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et sa dérivée est

$$\left(\frac{\cos}{\sin}\right)' = \frac{-1}{\sin^2(x)} = -\left(1 + \cot^2(x)\right).$$

2.2 La différentielle d'une fonction numérique.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique et $x \in I$, on suppose que f est dérivable en x et on pose

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

l'accroissement de f suivant la courbe (l'erreur réelle).
Le rapport $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ est appelé le taux d'accroissement entre x et $x + \Delta x$.
La fonction f est dérivable en a, donc

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

où $\dfrac{df}{dx} = f'(x)$ est dite notation de Leibniz. On pose

$$\varepsilon(\Delta x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - f'(x).$$

Notez que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$. Alors on obtient

$$\Delta f = \ f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x \ + \ \varepsilon(\Delta x)\Delta x.$$

La fonction f est dérivable en x équivalent à

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$$

au voisinage de x et $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varepsilon(\Delta x) = 0$.
On définit alors la différentielle df de la fonction f comme l'application linéaire

$$\begin{aligned} df : I &\to \mathbb{R} \\ h &\mapsto f'(x)h \end{aligned}$$

Par conséquent Δf, l'accroissement de f suivant la courbe, s'écrit comme la somme de deux termes

$$\Delta f = df(\Delta x) + \varepsilon(\Delta x)\Delta x.$$

$df(\Delta x)$ est le terme linéaire (une droite).
$r(\Delta x) = \varepsilon(\Delta x)\Delta x$ est le reste non linéaire négligeable devant Δx car $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{r(\Delta x)}{\Delta x} = 0$.
Si on fixe un $x_0 \in I$, on obtient

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x - x_0)(x - x_0).$$

2.2.1 Définition de la droite tangente

La droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ qui passe par le point $(x_0, f(x_0))$ et de pente $f'(x_0)$ est appelée la droite tangente à la courbe $y = f(x)$ au point $(x_0, f(x_0))$. L'accroissement de f suivant la courbe $\Delta f \approx df = f'(x)dx$ est l'accroissement suivant la tangente.

Exemple 45. *Trouvons une approximation de la valeur* $\sqrt{4,6}$.
On pose $f(x) = \sqrt{x}$ *donc* $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, *pour tout* $x > 0$. *Soient* $x_0 = 4$ *et* $x = 4,6$. *Alors*

$$\Delta f = \sqrt{4,6} - \sqrt{4} \approx df = \frac{1}{2\sqrt{4}}(4,6-4) = \frac{1}{4}(0,6) = 0,15.$$

Par conséquent,

$$\sqrt{4,6} \approx \sqrt{4} + 0,15 = 2,15.$$

Théorème 46 (Fonctions composées, Règle de chaîne)). *Soient $f : I \to \mathbb{R}$, et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$. Si f est différentiable en a, et g est différentiable en $f(a) \in J$ alors $h = g \circ f$ est différentiabe en a. De plus,*

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))\, f'(a).$$

Preuve. La fonction f est différentiable en a, alors

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x-a)(x-a) \lim_{x\to a} \varepsilon_1(x-a) = 0.$$

De même, soit $y_0 = f(a)$, alors on a

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0)(y-y_0) + \varepsilon_2(y-y_0)(y-y_0) \lim_{y\to y_0} \varepsilon_2(y-y_0) = 0.$$

Si on prend $y = f(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} h(x) - h(a) &= g(y) - g(y_0) \\ &= (g'(y_0) + \varepsilon_2(y-y_0))(y-y_0) \\ &= (g'(y_0) + \varepsilon_2(y-y_0))\left[f'(a)(x-a) + \varepsilon_1(x-a)(x-a)\right] \\ &= (g'(y_0) + \varepsilon_2(y-y_0))\left[f'(a) + \varepsilon_1(x-a)\right](x-a) \\ &= g'(y_0)f'(a)(x-a) + \left[f'(a)\varepsilon_2(y-y_0) + g'(y_0)\varepsilon_1(x-a) + \varepsilon_1(x-a)\varepsilon_2(y-y_0)\right](x-a). \end{aligned}$$

Donc

$$h(x) - h(a) = g'(y_0)f'(a)(x-a) + \varepsilon(x-a)(x-a),$$

avec

$$\varepsilon(x-a) = \left[f'(a)\varepsilon_2(y-y_0) + g'(y_0)\varepsilon_1(x-a) + \varepsilon_1(x-a)\varepsilon_2(y-y_0)\right].$$

De plus, $y = f(x) \to y_0 = f(a)$ quand $x \to a$ car f est continue en a, donc

$$\lim_{y\to y_0} \varepsilon_2(y-y_0) = 0.$$

Par conséquent

$$\lim_{x\to a} \varepsilon(x-a) = \lim_{x\to a} \left[f'(a)\varepsilon_2(y-y_0) + g'(y_0)\varepsilon_1(x-a) + \varepsilon_1(x-a)\varepsilon_2(y-y_0)\right] = 0.$$

D'où

$$h(x) - h(a) = g'(y_0)f'(a)(x-a) + \varepsilon(x-a)(x-a), \quad \text{et} \quad \lim_{x\to a} \varepsilon(x-a) = 0.$$

C'est à dire

$$h\prime(a) = (g \circ f)'(a) = g'(y_0)f'(a) = g'(f(a))\, f'(a).$$

2.2.2 Extremum d'une fonction numérique.

Définition 47. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$, et $a \in I$.*

(1) *On dit que f admet un maximum local ou relatif en a (rep. local ou relatif strict) si et seulement si, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in]a-\delta, a+\delta[$, $f(x) \leq f(a)$ (resp. $f(x) < f(a)$).*

(2) *On dit que f admet un minimum local ou relatif en a (resp. local ou relatif strict) si et seulement si, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in]a-\delta, a+\delta[$, $f(x) \geq f(a)$ (rep. $f(x) > f(a)$).*

(3) *On dit que f admet un extremum local ou relatif en a (rep. local ou relatif strict) si et seulement si f admet un maximum local ou un minimum local en a.*

Théorème 48. *Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction numérique et $c \in]a, b[$. Si f est dérivable en c et f admet un extremum local en c alors $f'(c) = 0$.*

Preuve. La fonction f est dérivable en c si et seulement si

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) \in \mathbb{R}.$$

Supposons que f admet un minimum local en a, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall\, |h| < \delta, \quad f(c+h) - f(c) \leq 0.$$

$$\begin{cases} \text{Si } \delta > h > 0, \quad \text{alors} \quad \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \leq 0, \quad \text{donc} \quad \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) \leq 0 \\ \text{Si } -\delta < h < 0, \text{ alors} \quad \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} \geq 0, \quad \text{donc} \quad \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h} = f'(c) \geq 0. \end{cases}$$

Par conséquent $f'(c) = 0$.

Remarque 49. *Si $c = a$ ou $c = b$, le résultat n'est pas vrai. Par exemple, soit la fonction $f : [1,2] \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^2$. Alors f admet un minimum en 1 sur $[1,2]$ mais $f'(1) = 2$. Aussi, f admet un maximum en 2 sur $[1,2]$ mais $f'(2) = 4$.*

Théorème 50 (Théorème de Rolle)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction numérique continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Preuve. La fonction f est continue sur $[a,b]$, donc atteint ses bornes, cà d, $f([a,b]) = [f(x_1), f(x_2)]$, où $f(x_1)$ est le minimum et $f(x_2)$ est le maximum. Si $f(a) = f(x_1) = f(x_2) = f(b)$, alors la fonction
f est constante sur $[a,b]$, donc $f'(c) = 0$. Sinon, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(c) = f(x_1)$ ou $f(c) = f(x_2)$.
Dans les deux cas f admet un extremum en c, et d'près le théorème précédent $f'(c) = 0$.

Théorème 51 (Théorème des accroissements finis (théorème de la moyenne))**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction numérique continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Preuve On considère la droite $y = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ qui passe par les deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ et de pente $\dfrac{f(a)-f(b)}{b-a}$ la moyenne du taux d'accroisement.
On considère la fonction

$$h(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \right).$$

La fonction h est continue sur $[a,b]$, et est dérivable sur $]a,b[$. De plus, $h(a) = h(b) = 0$ alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$, (théorème de Rolle). Notez que

$$h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0,$$

donc

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Corollaire 52. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction numérique continue et dérivable sur I, et $x_1 < x_2$ dans I tels que $[x_1, x_2] \subset I$. Alors, il existe $c \in]x_1, x_2[$ tel que*

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Conséquences 53.

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction numérique continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$.

(1) Si $\forall x\in\,]a,b[\,,\ f'(x)\geq 0$ (resp. $f'(x)>0$) alors f est croissante (resp. strictement croissante).

(2) Si $\forall x\in\,]a,b[,\ f'(x)\leq 0$ (resp. $f'(x)<0$) alors f est décroissante (rep. strictement décroissante).

(3) Si $\forall x\in\,]a,b[\,,\ f'(x)=0$ alors f est une fonction constante.

Preuve. Les preuves découlent du corollaire.

Exemple 54. *La fonction définie par*

$$f(x)=\cos^2(x)+\sin^2(x)$$

est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f'(x)=-2\cos(x)\sin(x)+2\sin(x)cos(x)=0,\qquad \forall x\in R.$$

Donc,

$$f(x)=\cos^2(x)+\sin^2(x)=c\in\mathbb{R}.$$

Il suffit de choisir une valeur, par exemple, $f(0)=1+0=1$, *donc*

$$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1.$$

2.3 Généralisation du théorème des accroissements finis

Théorème 55 (Cauchy)**.** *Soient* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *deux fonctions numériques continues sur* $[a,b]$ *et dérivables sur* $]a,b[$. *Supposons que* $g'(x)\neq 0,\forall x\in\,]a,b[$. *Alors, il existe* $c\in\,]a,b[$ *tel que :*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Preuve. D'après le théorème des acroissement finis apliqué à g, on a $g'(c)=\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}\neq 0$, car $g'(x)\neq 0$, pour tout $x\in\,]a,b[$ et donc $g(b)\neq g(a)$. On considère la fonction

$$h(x)=f(x)-\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))\right).$$

La fonction h est continue sur $[a,b]$, et dérivable sur $]a,b[$. De plus $h(a)=h(b)=0$. Alors Il existe $c\in\,]a,b[$ tel que $h'(c)=0$;

$$h\prime(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0\Longrightarrow\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Conséquences 56 ([Règle de l'Hospital)**.** *Suposons que* f *et* g *vérifient les conditions du théorème de Cauchy et*

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}g(x)=0.$$

Si $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *existe ou égal à* $\pm\infty$ *alors*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemples 57.

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x)}{x}=\dfrac{0}{0}$ forme indéterminée ! Mais

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin'(x)}{x'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)}{1}=\cos(0)=1\Longrightarrow\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1.$$

(2) De même on démontre que
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2+3x}=0.$$

Remarque 58. *Le résultat reste valable si :*
— *on remplace* $x \to a$ *par* $x \to a^{\pm}$ *ou* $x \to \pm\infty$.
— *on remplace* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ *par* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$.

2.4 Fonction réciproque

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Par définition on a
$$f(I) = \{y \in \mathbb{R}/ \quad \exists x \in I,\ y = f(x)\}.$$

Si on restreint f à son image, alors $f : I \to f(I)$ est une fonction surjective. Par conséquent la fonction $f : I \to f(I)$ est bijective si et seulement si f est injective.

La fonction f est injective si et seulement si pour tout $x_1, x_2 \in I$
$$f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

La fonction f est bijective si et seulement si pour tout $y \in f(I)$, il existe un <u>unique</u> $x \in I$ tel que $y = f(x)$.

Si la fonction f est bijective, on peut définir la fonction réciproque de f par $f^{-1} : f(I) \to I$, telle que pour tout $y \in f(I)$, on lui associe un $x \in I$ unique tel que $y = f(x) \Longleftrightarrow f^{-1}(y) = x$.

Par définition de la fonction f^{-1} on a :
$$f(f^{-1}(x)) = x, \quad \forall x \in f(I) \qquad \text{et} \qquad f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall x \in I$$

Par conséquent le graphe de la fonction f^{-1} est donnée par les points $(f(x), x)$, et donc le graphe de la fonction f^{-1} est symétrique au graphe de la fonction f par à la droite bissectrice (diagonale) $y = x$.

Théorème 59. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue strictement croissante (resp. strictement décroissante). Alors*

(A) *La restriction de* $f : [a, b] \to [f(a), f(b)]$ *(resp.* $f : [a, b] \to [f(b), f(a)]$*) est bijective.*

(B) *La fonction* f^{-1} *est strictement croissante (resp. strictement décroissante). C'est à dire les fonctions* f *et* f^{-1} *ont un même sens de monotonie.*

(C) *La fonction* $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ *est continue sur* $[f(a), f(b)]$ *(resp.* $[f(b), f(a)]$*).*

Preuve. On peut supposer que la fonction f est strictement croissante (l'autre cas est similaire).

(A) La fonction f est strictement croissante, donc $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$, il suffit de montrer que f est injective. Soient $x_1, x_2 \in [a, b]$, tels que $f(x_1) = f(x_2)$, supposons que $x_1 \neq x_2$ c-à-d $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$.
- Si $x_1 < x_2$, puisque f est strictement croissante, $f(x_1) < f(x_2)$ contrdiction avec $f(x_1) = f(x_2)$.
- Si $x_1 > x_2$, puisque f est strictement croissante, $f(x_1) > f(x_2)$ contrdiction avec $f(x_1) = f(x_2)$.
Par conséquent $x_1 = x_2$ et donc f est bijective.

(B) Soient $y_1, y_2 \in [f(a), f(b)]$, tels que $y_1 < y_2$. Donc il existe $x_1, x_2 \in [a, b]$, $x_1 = f^{-1}(y_1)$, et $x_2 = f^{-1}(y_2)$.
Supposons $x_1 = f^{-1}(y_1) \geq x_2 = f^{-1}(y_2)$, puisque f est strictement croissante, on a
$$f(x_1) = f\left(f^{-1}(y_1)\right) = y_1 \geq f(x_2) = f\left(f^{-1}(y_2)\right) = y_2,$$
donc $y_1 \geq y_2$, contradiction avec $y_1 < y_2$.
Par conséquent, si $y_1 < y_2$ alors $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$, d'où f^{-1} est strictement croissante.

(C) Soit $y_0 \in f(I)$, alors il existe $x_0 \in I$ tel que $y_0 = f(x_0)$ et $x_0 = f^{-1}(y_0)$.
Soit $\varepsilon > 0$, est-ce qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|y - y_0| \leq \delta \Rightarrow \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| = \left|f^{-1}(y) - x_0\right| \leq \varepsilon$?
On a

$$\left|f^{-1}(y) - x_0\right| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow x_0 - \varepsilon \leq f^{-1}(y) \leq x_0 + \varepsilon \Longleftrightarrow f(x_0 - \varepsilon) \leq y \leq f(x_0 + \varepsilon),$$

car f est strictement croissante. D'une autre part on a

$$x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon \Longrightarrow f(x_0 - \varepsilon) < f(x_0) = y_0 < f(x_0 + \varepsilon).$$

Posons alors $\delta = \min\left(y_0 - f(x_0 - \varepsilon), f(x_0 + \varepsilon) - y_0\right) > 0$. On a

$$\delta \leq y_0 - f(x_0 - \varepsilon) \Longrightarrow -\delta \geq -(y_0 - f(x_0 - \varepsilon)), \qquad \text{et} \qquad \delta \leq f(x_0 + \varepsilon) - y_0,$$

donc, si $|y - y_0| \leq \delta$ alors $y_0 - \delta \leq y \leq y_0 + \delta$, en utilisant les inégailtés précédentes on a

$$y_0 - (y_0 - f(x_0 - \varepsilon)) \leq y_0 - \delta \leq y \leq y_0 + \delta \leq y_0 + f(x_0 + \varepsilon) - y_0).$$

Donc

$$|y - y_0| \leq \delta \Longrightarrow f(x_0 - \varepsilon) \leq y \leq f(x_0 + \varepsilon) \Longrightarrow x_0 - \varepsilon \leq f^{-1}(y) \leq x_0 + \varepsilon,$$

car f^{-1} est strictement croissante. Par conséquent,

$$|y - y_0| \leq \delta \Rightarrow x_0 - \varepsilon \leq f^{-1}(y) \leq x_0 + \varepsilon \Rightarrow \left|f^{-1}(y) - x_0\right| \leq \varepsilon \Rightarrow \left|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)\right| \leq \varepsilon.$$

Ce qui montre que la fonction f^{-1} est continue sur $[f(a), f(b)]$.

Exemple 60. *La fonction $f(x) = x^2$ est continue et stictement croissante sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, +\infty[$. Donc $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ existe et strictement croissante qu'on note $\sqrt{x}$, et on a $\sqrt{x^2} = x$, pour tout $x \geq 0$, et $(\sqrt{x})^2 = x$, pour tout $x \geq 0$.*

2.5 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 61. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$ (resp. $f'(x) < 0$ pour tout $x \in]a, b[$) alors la fonction inverse $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b]$ (resp. $f^{-1} : [f(b), f(a)] \to [a, b]$) est dérivable sur $]f(a), f(b)[$ et pour tout $y_0 = f(x_0) \in]f(a), f(b)[$, on a*

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Preuve. Soit $y = f(x) \neq y_0 = f(x_0) \in]f(a), f(b)[$; alors

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)}.$$

La fonction f^{-1} est continue et $x = f^{-1}(y) \to x_0 = f^{-1}(y_0)$ quand $y \to y_0$. En changeant les variables, on obtient

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Exemple 62. *La fonction $f(x) = x^2$ définie de $[0, +\infty[$ à valurs dans $[0, +\infty[$, est bijective et dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et $f'(x) = 2x$. Donc $f^{-1}(x) = \sqrt{x} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$. Pour $y_0 = (x_0)^2 \neq 0$ on a*

$$(\sqrt{y_0})' = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{2x_0} = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}.$$

2.6 Primitives d'une fonction numérique

Définition 63. *On dit que la fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une primitive de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sur $[a,b]$ si et seulement si F est dérivable sur $[a,b]$ et $F' = f$ sur $[a,b]$.*

Proposition 64. *Si F est une primitive de f sur $[a,b]$ alors toutes les primitives G de f sur $[a,b]$ sont données par $G = F + C$, où C est une constante appartenante à $\mathbb{R}$.*

Preuve. Soit G une primitive de f sur $[a,b]$, la fonction $(G - F)$ est dérivable sur $[a,b]$ et sa dérivée est $(G-F)' = G' - F' = f - f = 0$, par conséquent $G - F = C$ est une constante (voir le cours).

2.7 Fonctions usuelles

Soit $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$, on considère la fonction définie par $f(x) = x^n$, alors f est dérivable et $f'(x) = nx^{n-1}$, par conséquent les primitivess des fonctions $f(x) = x^n$ sont $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$.

Pour $n = -1$, la fonction $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$, admet une primitive qu'on va définir dans ce qui suit.

2.7.1 Logarithme népérien

Définition 65. *On appelle **logarithme népérien** et on note* ln *ou* Log*, la fonction pirmitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annulle en 1 (c-à-d $\ln(1) = 0$).*

La fonction logarithme népérien est dérivable (donc continue) sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, \infty[, \qquad (\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Par conséquent, la fonction ln est une fonction strictement croissante sur $]0, +\infty[$, D'où

$$\begin{aligned} x > 1 \quad &\Longrightarrow \ln(x) > \ln(1) = 0; \\ 0 < x < 1 &\Longrightarrow \ln(x) < \ln(1) = 0. \end{aligned}$$

Proposition 66. *Soit U une fonction strictement positive et dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$ alors*

$$(\ln(U(x)))' = \frac{U'(x)}{U(x)} \qquad \forall x \in I.$$

Preuve. D'après la règle de composition des fonctions, on a pour tout $x \in I$

$$(\ln(U(x))' = \left(\ln'(U(x))\right) U'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}.$$

Corollaire 67. *Pour tout $a, b \in]0, +\infty[$ on a l'égalité suivante*

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Preuve. Soit $a > 0$, on pose $U(x) = ax$ pour tout $x \in]0, 1 + \infty[$ alors d'après la proposition précédente on a

$$(\ln(U(x)))' = \frac{(ax)'}{ax} = \frac{1}{x},$$

donc $ln(ax) = \ln(x) + C$, car $\ln(ax)$ est une primitive de $\dfrac{1}{x}$. Pour $x = 1$, on a $\ln(a) = \ln(1) + C = C$, pour tout $x \in]0, \infty[$. Par conséquent

$$\ln(ax) = \ln(x) + \ln(a).$$

En particulier, pour $x = b > 0$ on a

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b).$$

Conséquences 68.

(i) Soit $b > 0$, donc $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$. En effet,

$$0 = \ln(1) = \ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) \Longrightarrow \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b).$$

(ii) Soient $a, b > 0$ alors

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b).$$

(iii) Par récurrence, on démontre que

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall a \in \mathbb{R}^*, \qquad \ln(a^n) = n\ln(|a|).$$

(iv) La fonction ln n'est pas bornée, sinon, il existe $M > 0$ tel que

$$|\ln(x)| \leq M, \qquad \forall x \in \left]0, \infty\right[.$$

Donc, en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\ln(2^n) = n\ln(2) \leq M$. Notez que $\ln(2) > 0$, donc $n \leq \dfrac{M}{\ln(2)}$, contradiction avec $\mathbb{N}$ non borné.

(v) La fonction *ln* est strictement croissante et non majorée, donc

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

(vi) Puisque pour tout $x > 0$, $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ alors

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\lim_{y \to +\infty} \ln(y) = -\infty.$$

(vii) La fonction ln est continue, strictement croissante et n'est pas bornée sur $]0, +\infty[$, donc

$$\ln\left(]0, \infty[\right) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

D'après le théorème des valeurs intérmidiaires, il existe alors un nombre qu'on note e unique car *ln* est strictement croissante tel que $ln(e) = 1$, en utisant les méthodes d'approximations, on obtient

$$e \approx 2.718281\cdots.$$

Géométriquement $\ln(a)$ $(a > 0)$ est la valeur de l'aire délimité par les droites verticales $x = 1, x = a$ et le graphe $y = \dfrac{1}{x}$.

2.7.2 La fonction Exponentielle

La fonction *ln* est continue et strictement croissante de $]0, \infty[$ à valeurs dans $]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$. Donc ln admet une fonction réciproque qu'on note exp, et est définie de $\mathbb{R}$ dans $]0, +\infty[$. Appelée exponenetielle. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \left]0, \infty\right[, \qquad y = \exp(x) \Longleftrightarrow x = \ln(y).$$

La fonction exp est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ comme fonction réciproque d'une fonction continue et strictement croissante. De plus, pour tout $a > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$a^x = \exp\left(x\ln(a)\right).$$

Remarque 69.

(1) Si $0 < a < 1$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (a^x)' = \ln(a)\, a^x < 0$, donc la fonction exoponentielle $x \mapsto a^x$ est strictement décroissante.

(2) Si $a > 1$ alors $\forall x \in]-\infty, \infty[\,, \quad (a^x)' = \ln(a)\, a^x > 0$, donc la fonction exoponentielle $x \mapsto a^x$ est strictement croissante.

Dans les deux cas, la fonction exoponentielle $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$ admet une fonction réciproque définie par

$$f^{-1} \;:\; \begin{array}{ccc}]0,\infty[& \to &]-\infty,\infty[\\ x & \mapsto & f^{-1}(x) = \log_a(x). \end{array}$$

2.7.3 La fonction logarithme de base $a > 0$

Si $a = 1$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a^x = 1$ qui est une fonction constante. Alors dans ce qui suit, a est nombre réel strictement positif et différent de 1 $(a \neq 1)$.

Définition 70. *Soit $a \in]0,\infty[\,\backslash\{1\}$, on appelle logarithme de base a, et on note $\log_a$, la fonction définie de $]0,\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ réciproque de la fonction exoponentielle $x \mapsto a^x$;*

$$\forall x \in]0,\infty[\,,\ \forall y \in]-\infty,\infty[\,, \quad y = \log_a(x) \Longleftrightarrow x = a^y.$$

Proposition 71. *Soit $x > 0$ alors on a*

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \qquad \textit{donc} \qquad (\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

Preuve. Soient $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, alors

$$y = \log_a(x) \Longleftrightarrow x = a^y \Longleftrightarrow \ln(x) = y\ln(a) \Longleftrightarrow y = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Donc, passant à la dérivée on déduit que

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x\ln(a)}.$$

2.7.4 Fonctions puissances

.

Définition 72. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la fonction puissance ($x > 0$ d'exposant α) par*

$$x^\alpha = \exp(\alpha\ln(x)) = e^{\alpha\ln(x)}.$$

Dérivée de la fonction $x \mapsto x^\alpha$.

Pour tout $x > 0$, on a

$$(x^\alpha)' = \left(e^{\alpha\ln(x)}\right)' = \frac{\alpha}{x}\, x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}.$$

2.8 Fonctions trigonométriques réciproques.

2.8.1 Fonction arcsin .

La fonction $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ est continue, impaire et périodique de période 2π.
La fonction sin n'est pas injective car $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$ et $x + 2k\pi \neq x$ si $k \neq 0$. On considère alors la restriction de sin à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, sur lequel la fonction sin est strictement croissante car $\sin'(x) = \cos(x) > 0$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Alors la fonction sin admet une fonction réciproque continue

et strictement croissante, qu'on note arcsin, définie de $\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right), \sin(\frac{\pi}{2})\right] = [-1, 1]$ à valeurs dans $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Soient $x \in [-1, 1]$ et $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Par définition on a

(A)

$$y = \arcsin(x) \Longleftrightarrow \sin(y) = x.$$

(B)

$$\arcsin(\sin(y)) = y \qquad \text{et} \qquad \sin(\arcsin(x)) = x.$$

Exemples 73.

(i) On a $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Notez que $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

(ii) On a $\arcsin\left(\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -\frac{\pi}{2}$ car $\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -1$ et $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$.

Proposition 74. *Soit* $x \in [-1, 1]$, *alors* $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

Preuve. Puisque pour tout $x \in [-1, 1]$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin(x) \leq \frac{\pi}{2}$ alors $\cos(\arcsin(x)) \geq 0$. D'où

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(x))} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Exemple 75. *Soit* $x \in [-1, 1]$. *Puisque* $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$ *pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$ *alors*

$$\cos(2\arcsin(x)) = 1 - 2x^2.$$

Pour $x = -\frac{2}{3}$ *on a*

$$\cos\left(\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{1}{9}.$$

Dérivées de la fonction arcsin

La fonction sin est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et sa dérivée $cos(y) \neq 0$, $\forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc arcsin est dérivable sur $]-1, 1[$ et

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Donc,

$$\forall x \in \left]-1, 1\right[, \qquad (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

2.8.2 Fonction arccos .

La fonction $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ est continue, paire et périodique de période 2π.
La fonction cos n'est pas injective car $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $x + 2k\pi \neq x$ si $k \neq 0$. On considère alors la restriction de cos à l'intervalle $[0, \pi]$, sur lequel la fonction cos est strictement décroissante sur $[0, \pi]$, car $\cos'(x) = -\sin(x) < 0$ sur $[0, \pi]$. Donc, la fonction cos admet une fonction réciproque continue et strictement décroissante, qu'on note arccos définie de $[\cos(\pi), \cos(0)] = [-1, 1]$ à valeurs dans $[0, \pi]$.

Soient $x \in [-1, 1]$ et $y \in [0, \pi]$; par définition on a

$$y = \arccos(x) \Longleftrightarrow \cos(y) = x, \quad \cos(\arccos(x)) = x \quad \text{et} \quad \arccos(\cos(y)) = y.$$

Exemple 76. $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$, *car* $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ *et* $\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi]$.

Proposition 77. *Pour tout* $x \in [-1,1]$ *on a*

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Preuve. On a $\sin(\arccos(x)) \geq 0$, car $0 \leq \arccos(x) \leq \pi$, donc

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos(x))} = \sqrt{1-x^2}.$$

Exemple 78. *On sait que* $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$. *Donc on déduit que*

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{3}{5}\right) + \arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right) = \frac{5}{13}\sin\left(\arccos\left(\frac{3}{5}\right)\right) + \frac{3}{5}\sin\left(\arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right).$$

Et d'après la proposition, on déduit que

$$\sin\left(\arccos\left(\frac{3}{5}\right) + \arccos\left(\frac{5}{13}\right)\right) = \frac{56}{65}.$$

Pour $a = b$ *on a* $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$. *On pose* $a = \arccos(x)$ *on déduit que*

$$\sin(2(x)) = 2x\sqrt{1-x^2}, \qquad \forall x \in [-1,1].$$

Dérivées de la fonction arccos

La fonction cos est dérivable sur $[0,\pi]$, et sa dérivée $-\sin(y) \neq 0, \forall y \in]0,\pi[$. D'après ce qui précéde arccos est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$(\arccos)'(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos(x))} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Donc, pour tout $x \in]-1,1[$

$$(\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2.8.3 Fonction arctan

La fonction tan : $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, car $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2}(x) > 0$ sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Donc, la fonction tan admet une fonction réciproque continue et strictement croissante, qu'on note arctan définie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Par définition on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$,

$$y = \arctan(x) \Longleftrightarrow \tan(y) = x, \quad \tan(\arctan(x)) = x \quad \text{et} \quad \arctan(\tan(y)) = y.$$

Proposition 79. *Soit* x *un nombre réel, alors*

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \textit{et} \qquad \sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Preuve. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$ $|\arctan(x)| < \frac{\pi}{2}$ alors $\cos(\arctan(x)) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et puisque $\cos^2(x) = \dfrac{1}{1+\tan^2(x)}$ alors

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\arctan(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

D'une autre part, puisque $|\sin(a)| = \sqrt{1-\cos^2(a)}$ pour tout $|a| < \frac{\pi}{2}$ alors on a la deuxième égalité (notez que les fonctions sin et arctan sont impaires).

Dérivées de la fonction arctan

La fonction tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, et sa dérivée $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2}(x) > 0$, pour tout $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Donc, la fonction Arctangente est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in R$ on a

$$(\arctan)'(x) = \cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

2.9 Les Dérivées successives

Définition 80. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si f' est aussi dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable sur I. La dérivée de f' est appelée la dérivée seconde de f qu'on note f" ou $\frac{d^2f}{dx^2}$.*

Par récurrence, on définit la dérivée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ de f ou simplement la dérivée $n^{i\grave{e}me}$ de f comme étant la dérivée d'ordre $n-1$ de f' sur I, qu'on note $f^{(n)}$ ou $\frac{d^nf}{dx^n}$. On a alors, pour $n \geq 1$,

$$f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)' \qquad ou \qquad \frac{d^nf}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right).$$

Remarque 81. *Par convention, on a $f^{(0)} = f$.*

- On dit que f est n fois dérivable sur I si et seulement si $f^{(n)}$ est définie sur I.

- On dit que f est indéfinement dérivable sur I si et seulement si f est n fois dérivable sur I, pour tout $n \geq 0$.

Exemples 82.

(1) Soit $f(x) = \sin(2x)$ alors $f'(x) = 2\cos(2x)$, $f"(x) = -2^2\sin(2x)$ .... Par récurrence,

$$f^{(n)}(x) = 2^n \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

(2) Soit $f(x) = e^x$, alors puisque $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors

$$f^{(n)}(x) = f(x) = e^x.$$

(3) Soit $f(x) = e^{-x}$ alors puisque $f'(x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors par récurrence

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n f(x) = (-1)^n e^{-x}.$$

(4) Soit $f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$ alors on a $f'(x) = -x^{-2}$, $f"(x) = (-1)(-2)x^{-3}$, donc par récurrence

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n! x^{-n-1} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}.$$

Définition 83. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.*

- Si f' est continue sur I, on dit que f est continûment dérivable sur I ou simplement f est de classe

C^1 sur I.

- Si f est dérivable n fois et $f^{(n)}$ est continue, on dit que f est de classe C^n sur I.

- Si f est seulement continue sur I, on dit que f est de classe C^0 sur I.

- Si f est indéfinement dérivable sur I, on dit que f est de classe C^∞ sur I.

Théorème 84. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, et $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions n fois dérivable sur I. Alors*

(i) *La fonction $f+g$ est n fois dérivable et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$.*

(ii) *La fonction αf est n fois dérivable et $(\alpha f)^{(n)} = \alpha f^{(n)}$.*

(iii) *La fonction fg est n fois dérivable et on a la formule de Leibniz*

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}, \qquad avec \quad C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

(iv) *La fonction* $\dfrac{f}{g}$ *est* n *fois dérivable, si* $g(x) \neq 0$.

Preuve. (i), (ii) et (iv) sont faciles à vérifier par récurrence.

(iii) Pour $n = 1$, on a $(fg)' = f'g + g'f$, vraie. Supposons que l'égalité est vraie pour n, c-à-d ; $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$. La fonction $(fg)^{(n)}$ est dérivable comme somme et produit de fonctions dérivables ; alors

$$(fg)^{(n+1)} = \left((fg)^{(n)}\right)' = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)}.$$

En posant $l = k+1$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k+1)} g^{(n-k)} = \sum_{l=1}^{n+1} C_n^{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-k)}.$$

Puisque $C_n^{-1} = 0$, on a

$$\sum_{l=1}^{n+1} C_n^{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-k)} = \sum_{l=0}^{n+1} C_n^{l-1} f^{(l)} g^{(n+1-k)}.$$

Puisque $C_n^{n+1} = 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)}.$$

Donc,

$$(fg)^{(n+1)}) = \sum_{k=0}^{n+1} C_n^{k-1} f^{(k)} g^{(n-k+1)} + \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k+1)}.$$

Par conséquent,

$$(fg)^{(n+1)}) = \sum_{k=0}^{n+1} (C_n^{k-1} + C_n^k) f^{(k)} g^{(n-k+1)} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k f^{(k)} g^{(n-k+1)},$$

car $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$. D'où la proposition est vraie pour $n+1$.

Exemple 85. *Déterminer la dérivée* $n^{ième}$ *de la fonction* $f(x) = (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$.

En appliquant la formule de Leibniz on a

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (x^3 + x^2 + 1)^{(k)} \left(e^{-x}\right)^{(n-k)}.$$

Or

$$(x^3 + x^2 + 1)^{(k)} = \begin{cases} x^3 + x^2 + 1 & \textit{pour} \quad k = 0 \\ 3x^2 + 2x & \textit{pour} \quad k = 1 \\ 6x + 2 & \textit{pour} \quad k = 2 \\ 6 & \textit{pour} \quad k = 3 \\ 0 & \textit{pour} \quad k \geq 4 \end{cases}$$

et d'après l'exemple précédent **(3)**

$$\left(e^{-x}\right)^{(n-k)} = (-1)^{n-k} e^{-x}.$$

Donc

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= (-1)^n e^{-x} \textstyle\sum_{k=0}^{3} C_k^n (x^3 + x^2 + 1)^{(k)} (-1)^k \\ &= (-1)^n e^{-x} \left((x^3 + x^2 + 1) - n(3x^2 + 2x) + \frac{n(n-1)}{2}(6x + 2) - 6\frac{n(n-1)(n-2)}{6} \right). \end{aligned}$$

D'où

$$f^{(n)}(x) = \left(x^3 - (3n-1)x^2 + n(3n-5)x - n(n-1)(n-3) + 1\right)(-1)^n e^{-x}.$$

Théorème 86 (Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe C^n, telle que la fonction f est $(n+1)$ fois dérivable sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

ou

$$f(b) - f(a) = f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n)!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarque 87. *Si $n = 0$, on retrouve le théorème des accroissements finis.*

Preuve. On pose, pour un entier fixé n,

$$A_n = f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k \qquad (1)$$

On considère une fonction, g, continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ qui est définie par

$$g(x) = f(b) - f(x) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k \right) - A_n \frac{(b-x)^{n+1}}{(b-a)^{n+1}}.$$

Alors on a $g(a) = 0$ d'après (1) et $g(b) = 0$; donc d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Or

$$g'(x) = -f'(x) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} \right) + (n+1)A_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}}$$

et puisque

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k = f'(x) - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(x)}{k!}(b-x)^k - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!}(b-x)^{k-1} = -f'(x) + \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n.$$

donc

$$g'(x) = -f'(x) + \left(f'(x) - \frac{f^{(n+1)}}{n!}(b-x)^n \right) + (n+1)A_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}} = (n+1)A_n \frac{(b-x)^n}{(b-a)^{n+1}} - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n.$$

Par conséquent,

$$g'(c) = 0 \Longrightarrow (n+1)A_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-a)^{n+1} \Longrightarrow A_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

D'où d'après (1) on a

$$f(b) - f(a) = f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n)!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si on pose $b = x$ et $a = 0$ on obtient le résultat suivant

Théorème 88 (Formule de Maclaurin à l'ordre n)**.** *Soit $f : [0,x] \to \mathbb{R}$ $(x > 0)$ de classe C^n, telle que la fonction f est $(n+1)$ fois dérivable sur $]0,x[$. Alors il existe $c \in]0,x[$ tel que*

$$f(x) - f(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Inégalité de Taylor-Lagrange

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est de classe C^{n+1}, telle que la fonction $\left|f^{(n+1)}\right| \leq M$ sur $]a, b[$. Alors

$$\left|f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k\right| \leq M\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Si f est de classe C^{n+1} sur I contenant 0, et si la fonction $\left|f^{(n+1)}\right| \leq M$ sur I. Alors

$$\forall x \in I, \qquad \left|f(x) - f(0) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right| \leq M\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Exemple 89. *La fonction* $\sin$ *est de classe* C^n *(*$\forall n \in \mathbb{N}$*) sur* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *donc elle vérifie bien les conditions du théorème de Taylor-Maclaurin. Donc particulièrement pour* $n = 5$*, il existe* $c \in]0, x[$ *(avec* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*) tel que*

$$\sin(x) = \sin(0) + \cos(0)\, x - \frac{\sin(0)}{2!}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \frac{\sin(0)}{4!}x^4 + \frac{\cos(0)}{5!}x^5 - \frac{\sin(c)}{6!}x^6$$

c'est à dire

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{\sin(c)}{6!}x^6.$$

Donc, puisque $0 < \sin(c) < 1$ *alors*

$$-\frac{x^6}{6!} < \sin(x) - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} < 0.$$

On déduit que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \qquad x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} \leq \sin(x) \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}.$$

Proposition 90. *Si* f *est une fonction de classe* C^{n+1} *sur un intervalle* $[a, b]$ *contenant* 0*. Alors, pour tout* $x \in [a, b]$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \varepsilon(x)x^n, \qquad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

On note $\varepsilon(x)x^n = o(x^n)$ *et on dit que* $\varepsilon(x)x^n$ *est négligeable devant* x^n *et on écrit*

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Preuve. La fonction f est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$, alors $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a, b]$. Donc, il existe $M > 0$ tel que

$$\forall x \in [a, b], \qquad \left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M.$$

D'après l'inégalité de Taylor-Lagrange, on a

$$\left|f(x) - f(0) - f'(0)x - \cdots - \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\right| \leq M\left|\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|.$$

Si $x \neq 0$, on pose

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{x^n}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k\right).$$

alors

$$0 \leq |\varepsilon(x)| \leq M\left|\frac{x}{n+1}\right|$$

Or

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{n+1} = 0$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0,$$

D'où

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + x^n \varepsilon(x).$$

2.10 Exercices

Exercice 1.

1. Soit U une fonction différentiable qui ne s'annulle pas sur un intervalle I, déterminer la dérivée de la fonction

$$f(x) = \ln |U(x)|.$$

2. En déduire les dérivées des fonctions suivantes :

(a) $y = \dfrac{\sqrt{x+13}}{(x-4)\sqrt[3]{2x+1}}$, **(b)** $y = \dfrac{(x^2+3)^{\frac{2}{3}}(3x+2)^2}{\sqrt{x+1}}$, **(c)** $y = (1+x^2)^{\sin(x)}$.

Exercice 2.

Soient f et g deux fonctions dérivables en a. Dé terminer les limites suivantes :

(a) $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}$, **(b)** $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)}{h}$.

Exercice 3.

Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

(a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$, **(b)** $f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$.

Exercice 4.

Etudier la dérivabilité et la continuité de la dérivabilité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$, **(b)** $f(x) = \begin{cases} x^3\sin(\frac{1}{x}) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$

Exercice 5.

1.a. Montrer que l'équation $-x^3 + x^2 - x + 2 = 0$ admet une solution réelle unique.

1.b. Montrer que cette solution est comprise entre 1 et 2, et donner une approximation de cette solution à 10^{-2} près.

2.a. Soit $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$ dérivable telle que

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty.$$

Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

2.b. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I, et $a, b \in I$ telle que :

$$f(a) = f(b) = 0, \qquad f'(a) > 0, \quad \text{et} \quad f'(b) > 0.$$

Montrer qu'il existe $c_1, c_2, c_3 \in]a, b[$ tel que $f(c_2) = 0$, et $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$.

3. On considère la fonction définie par

$$f(x) = x - 2 + \ln(x).$$

a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution réelle unique.

b. Montrer que f est bijective et calculer

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f\left(f^{-1}(x)\right)}{f^{-1}(x)}.$$

4. On considère la fonction définie par

$$f(x) = \cos^2(x).$$

a. Montrer que $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to f(\left[0, \frac{\pi}{2}\right])$ est bijective.

b. Déterminer le domaine de définition $D_{f^{-1}}$ de f^{-1}.

c. Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur $D_{f^{-1}}$. Calculer $(\ f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 6.

1. Montrer que

$$\forall x \in \,]-1, 0[\, \cup \,]0, 1[\,, \quad \frac{\ln(1+x)}{x} \leq -\frac{\ln(1-|x|)}{|x|}.$$

2. Soit $a \in \,]0, \infty[\, \setminus\{1\}$, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\log_a(x) - \log_{a^2}(x) + \log_{a^4}(x) = \frac{3}{4}.$$

3. Résoude dans $\mathbb{R}^2$, le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 8^x - 10y & = & 0 \\ 2^x - 5y & = & 0 \end{array}\right.$$

4. Démontrer que pour tous $a < b$, il existe $c \in \,]a, b[$ tel que

$$\frac{a + \sqrt{1+a^2}}{b + \sqrt{1+b^2}} = e^{\frac{a-b}{\sqrt{c^2}}}.$$

Exercice 7.

1. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{|x|}\frac{\pi}{2}$$

2. Soit $a > 0$ fixé, démontrer que :

i. Pour tout $x \in \left]-\infty, \frac{1}{a}\right[$

$$\arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a).$$

ii. Pour tout $x \in \left]\frac{1}{a}, \infty\right[$

$$\arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) \arctan(x) + \arctan(a) - \pi.$$

3. Etudier le cas $a < 0$.

Exercice 8.

Vérifier les identités suivantes :

1. $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.

2. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$.

3. $\tanh(x+y) = \dfrac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tan(x+y)}$.

4. Pour tout $r \in \mathbb{R}$,
$$(\cosh(x)+\sinh(x))^r = \cosh(rx)+\sinh(rx).$$

5. Pour tout $r \in \mathbb{R}$,
$$(\cosh(x)-\sinh(x))^r = \cosh(rx)-\sinh(rx).$$

Exercice 9.

Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

1. Si $f(x) = x^r$, avec $r \in \mathbb{R}$, alors
$$f^{(n)}(x) = r(r-1)(r-2)....(r-n+1)x^{r-n}, \qquad \forall x > 0.$$

2. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x^p, \qquad (p \in \mathbb{N})$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{p!}{(p-n)!}x^{p-n} & \text{si} \quad 0 \le n \le p \\ p! & \text{si} \quad p = n \\ 0 & \text{si} \quad p > n. \end{cases}$$

3. Soit $a \in \mathbb{R}$, si $f(x) = \frac{1}{a+x}$, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{a\}$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(a+x)^{p+1}}.$$

4. Si $f(x) = \sin(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors
$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Exercice 10.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur $[a,b]$, telle que $f(a) = f(b)$. Soit $x_0 \in \,]a,b[$, on pose
$$g(x) = f(x) - \frac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}(x-a)(x-b).$$

1. Calculer $g(a), g(x_0)$ et $g(b)$. Déduire que la fonction g' s'annule au moins deux fois sur $]a,b[$.

2. Montrer qu'il existe $c \in \,]a,b[$ tel que $f"(c) = \frac{2f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}$.

Exercice 11. (Suite de l'exercice 4. Chapitre 1)

Soit $x_0(t)$ la solution unique de l'équation $x^3 + tx - 1 = 0$, supposons que la fonction $t \mapsto x_0(t)$ est dérivable.

1. Montrer que la fonction x_0 est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $]0,1]$ et que pour tout $t \in]0,1]$ on a
$$x_0^{-1}(t) = \frac{1-t^3}{t}.$$

2. Montrer que, pour tout $t \in]0,1]$
$$x_0'(t) = -\frac{x_0(t)}{3x_0^2(t)+t}.$$

3. Déduire l'équation de la tangente de la coube représentante la fonction x_0 au point d'abscisse $t=0$.

3

Approximation locale d'une fonction numérique : Développement limité

3.1 Développements limités.

3.1.1 Définitions

Etant donnés $n \in \mathbb{N}$ et a un réel.

D.1. Soit f une fonction définie sur un voisinage I de a (qui est un intervalle). On dit que la fonction f admet un développement limité d'ordre n en a, (abrégé par $(DL_n(a))$) si et seulement si il existe un polynôme P de degré $\leq n$ tel que, pour tout $x \in I$,

$$f(x) \ = \ P(x-a) \ + \ o\left((x-a)^n\right).$$

ou d'une autre manière

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + o\left((x-a)^n\right).$$

D.2. Le polynôme $P \in \mathbb{R}_n[x]$ est appelé la partie régulière du développement limité d'ordre n de f et $o\left((x-a)^n\right)$ le reste du développement limité.

D.3. On dit que deux fonctions f et g sont équivalentes au voisinage de a et on note $f \underset{x\to a}{\sim} g$ si

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Remarques.

(1) En pratique, pour déterminer un développement limité au voisinage de $a \neq 0$, on pose $X = x-a$ et on cherche un développement limité au voisinage de 0 de la fonction $f(X+a)$ et à la fin on remplace X par $x-a$.

(2) Notez que

$$o\left(x^n\right) + o\left(x^n\right) = o\left(x^n\right), \qquad o\left(x^n\right) - o\left(x^n\right) = o\left(x^n\right) \qquad \text{et} \qquad o\left(x^n\right) \cdot o\left(x^p\right) = o\left(x^{n+p}\right).$$

Proposition 91. *La partie régulière P d'un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 d'une fonction f est unique. C'est à dire, si $f(x) = P(x) + o\left(x^n\right)$ alors P est unique.*

Preuve. Supposons qu'il existe deux polynômes de degré inférieur à n alors

$$f(x) = P(x) + o\left(x^n\right) \qquad \text{et} \qquad f(x) = Q(x) + o\left(x^n\right).$$

Donc $P - Q \in \mathbb{R}_n[x]$ et $P - Q = o\left(x^n\right)$. Supposons que $P - Q \neq 0$, alors il existe $a_p \neq 0$ avec $p \leq n$ tel que

$$(P-Q)(x) = a_p x^p + R(x), \qquad \text{où} \quad \deg(R) \leq p-1 \text{ et } (P-Q)(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p,$$

car

$$\lim_{x\to 0}\frac{(P-Q)(x)}{a_p x^p}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{R(x)}{a_p x^p}\right)=1.$$

Ce qui implique que $a_p x^p = o\left(x^n\right)$ et donc $p>n$; contradiction avec $p\leq n$. Donc $P=Q$; d'où l'unicité de la partie régulière du développement limité d'ordre n.

En utilisant cette proposition et le théorème de Taylor, on obtient le résultat, suivant, qui nous permet de déterminer les développements limités des fonctions usuelles.

Théorème 92. *Si f est de classe C^{n+1} au voisinage I de a, alors f admet un développement limité au voisinage de a d'ordre n, obtenu par la formule de Taylor*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+o\left((x-a)^n\right),\qquad \forall x\in I.$$

Si $a=0$, on obtient un développement limité au voisinage de 0 d'ordre n,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o\left(x^n\right).$$

3.1.2 Développements limités de certaines fonctions usuelles.

A. Si $f(x)=e^x$, on a $f^{(n)}(x)=e^x$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors la fonction exp est de classe $\mathbb{C}^\infty$ au voisinage de 0. Puisque $f^{(n)}(0)=1$ pour tout entier naturel n alors pour tout x au voisinage de 0 on a

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o\left(x^n\right).$$

B. Si $f(x)=\cos(x)$, on a $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. Donc f est de classe C^∞ au voisinage de 0, et

$$f^{(n)}(0)=\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)=\left\{\begin{array}{ccc}(-1)^k & \text{si} & n=2k\\ 0 & \text{si} & n=2k+1\end{array}\right.,\qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Donc au voisinage de 0 on a

$$\cos(x)=\sum_{k=0}^{2n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o\left(x^{2n}\right)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+o\left(x^{2n}\right).$$

C. Si $f(x)=\sin(x)$, on a $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, alors f est de classe C^∞ au voisinage de 0, et

$$f^{(n)}(0)=\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)=\left\{\begin{array}{ccc}(-1)^k & \text{si} & n=2k+1\\ 0 & \text{si} & n=2k\end{array}\right.,\qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Donc au voisinage d e 0 on a

$$\sin(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o\left(x^{2n+1}\right).$$

D. Si $f(x)=(1+x)^\alpha$, avec $\alpha\in\mathbb{R}$, on a $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, $\forall n\in\mathbb{N}$, donc f est de classe C^∞ au voisinage de 0, et

$$f^{(n)}(0)=\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n+1),\qquad \forall n\in\mathbb{N},$$

donc

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k\ +\ o\left(x^n\right).$$

E. Pour $\alpha = -1$ on a $(1+x)^{-1} = \dfrac{1}{1+x}$, donc au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right).$$

F. Si $\alpha = \dfrac{1}{2}$, alors $(1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}$, donc au voisinage de 0 on a

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n + o\left(x^n\right).$$

Frac3. Si $\alpha = -\dfrac{1}{2}$, alors $(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, donc au voisinage de 0 on a

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}x^n + o\left(x^n\right).$$

Proposition 93. *Soit f une fonction qui possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. c'est à dire,*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + o(x^n).$$

(1) *Si f est une fonction paire alors la partie régulière de son développement limité est un polynôme paire ;*

$$f(x) = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots + o\left(x^n\right).$$

(2) *Si f est une fonction impaire alors la partie régulière de son développement limité est un polynôme impaire ;*

$$f(x) = a_1 + a_3 x^3 + \cdots + o\left(x^n\right).$$

(3) *Si $p \leq n$ alors f admet un développement limité d'ordre p au voisinage de 0, et ce développement est obtenu en enlevant tous les termes de degré supérieur à p. C'est à dire, si*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right)$$

alors

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + .. + a_p x^p + o\left(x^p\right)$$

est le développement limité d'ordre p au voisinage de 0.

Preuve.

(1) La fonction f est une fonction paire, donc pour tout $x \in D_f$ on $-x \in Df$ et $f(-x) = f(x)$. Alors on a au voisinage de 0

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} = a_0 + a_2 x^2 + \cdots + o\left(x^n\right).$$

C'est à dire, $a_{2k+1} = 0$.

(2) De la même manière en utilisant l'égalité

$$f(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

(3) D'après la définition.

Exemple 94. *La fonction* cos *est paire et la fonction* sin *est impaire. La Développement limité d'ordre 3 en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est*

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + o\left(x^3\right).$$

3.1.3 Opérations sur les développements limités

La somme.

Si f et g sont deux fonctions qui possèdent un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 alors la somme $f+g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. De plus, si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ au voisinage de 0 alors pour tout x au voisinage de 0 on a

$$(f+g)(x) = (P+Q)(x) + o(x^n).$$

Le polynôme $P+Q$ est la partie régulière du développement limité d'ordre n de $f+g$ au voisinage de 0.

Le produit.

Si f et g sont deux fonctions qui possèdent un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 alors le produit fg admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. De plus, si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ au voisinage de 0 alors pour tout x au voisinage de 0 on a

$$(fg)(x) = R(x) + o(x^n).$$

Le polynôme R est la partie régulière du développement limité d'ordre n de fg au voisinage de 0. Le polynôme R est obtenu en enlevant les termes de degré strictement supérieur à n du polynôme produit PQ.

Exemple 95. *Soient f et g deux fonctions qui possèdent un développement limité d'ordre 2, donné par,*

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \textit{et} \qquad g(x) = x - x^2 + o(x^2).$$

La partie régulière du développement limité d'ordre n de fg est donée par

$$\left(x + \frac{x^2}{2}\right)(x - x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^4;$$

en enlevant les termes de degré strictement supérieur à 2. On trouve,

$$(fg)(x) = x^2 + o\left(x^2\right).$$

qui est le développement limité du produit fg. au voisinage de 0.

Composition de deux fonctions.

Soient f et g sont deux fonctions qui possèdent un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Si $f(0) = 0$ alors la fonction $g \circ f$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. De plus, si $f(x) = P(x) + o(x^n)$ et $g(x) = Q(x) + o(x^n)$ au voisinage de 0 alors on a

$$(f \circ g)(x) = R(x) + o(x^n).$$

Le polynôme R est la partie régulière du développement limité d'ordre n de $g \circ f$ au voisinage de 0.

Le polynôme R est obtenu en enlevant les termes de degré strictement supérieur à n du polynôme composé $Q \circ P$.

Exemples 96.

(1) Le développement limité d'ordre 4 de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ au voisinage de 0.
Soient $g(x) = e^x$ et $f(x) = -x^2$. Puisque

$$g(x) = \overbrace{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}}^{Q(x)} + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad f(x) = \overbrace{-x^2}^{P(x)} + o\left(x^4\right)$$

alors

$$(Q\circ P)(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!}.$$

Donc

$$(g\circ f)(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2} + o\left(x^4\right).$$

(2) Le développement limité d'ordre 3, de la fonction $x \mapsto \cos(\sin(x))$.
On pose $g(x) = \cos(x)$, et $f(x) = \sin(x)$, alors on a au voisinage de 0

$$g(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) = P(x) + o\left(x^3\right)$$

et

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o\left(x^3\right) = Q(x) + o\left(x^3\right)$$

alors

$$(P\circ Q)(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^6}{72}.$$

Donc la développement limité d'ordre 3 de la fonction$\cos\circ\sin$ au voisinage de 0 est

$$\cos(\sin(x)) = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right).$$

(3) Le développement limité d'ordre 3, de la fonction $x \mapsto e^{\sqrt{1+x}}$.
Si on pose $g(x) = e^x$ et $f(x) = \sqrt{x+1}$ alors les fonctions f et g ne vérifient pas les conditions de la proposition donc pour cela on choisit $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$; pour que $f(0) = 0$
Les $DL_3(0)$ de g et f sont donnés respectivement par

$$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) = P(x) + o(x^3)$$

et

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{24} + o\left(x^3\right) = Q(x) + o(x^3)$$

D'où

$$(P\circ Q)(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^3}{48} + \text{des termes de degré supérieur à 3.}$$

Par conséquent,

$$e^{\sqrt{x+1}} = e \cdot e^{\sqrt{x+1}-1} = e + \frac{e}{2}x + \frac{e}{48}x^3 + o\left(x^3\right).$$

Inverse d'une fonction

Soit g une fonction qui possède un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. Si $g(0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{1}{g}$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. De plus, si

$$g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

au voisinage de 0, avec $a_0 \neq 0$, alors

$$\frac{1}{g(x)} = R(x) + o\left(x^n\right).$$

Le polynôme R est la partie régulière du développement limité d'ordre n de $\frac{1}{g}$ au voisinage de 0.
Le polynôme R est obtenu en considérant

$$g(x) = a_0 \left(1 + \frac{1}{a_0}\left[a_1 x + \cdots + a_n x^n + o\left(x^n\right)\right]\right).$$

On pose alors $X = -\frac{1}{a_0}\left[a_1 x + \cdots + a_n x^n\right]$, on a alors

$$f(X) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{a_0(1-X)} = \frac{1}{a_0}\frac{1}{(1-X)} = \frac{1}{a_0}(1 + X + X^2 + .. + X^n + o(x^n)).$$

Donc $R(x)$ est le polynôme en enlevant les termes de degré strictement supérieur à n du polynôme produit

$$\frac{1}{a_0}\left(1 + X + X^2 + \cdots + X^n\right).$$

Exemples 97.

1. Donner le développement limité d'ordre 5, $DL_5(0)$, de la fonction $\frac{1}{\cos(x)}$ au voisinage de 0.

La fonction $g(x) = \cos(x)$, vérifie les conditions et , $\cos(0) \neq 0$. Le $DL_5(0)$ de la fonction g est donné par

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^5\right);$$

notez que $a_0 = 1$. On pose $X = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}$. On a alors

$$\frac{1}{\cos(x)} = \left(1 + X + X^2 + X^3 + X^4 + X^5 + o\left(x^5\right)\right)$$

Donc on obtient après l'enlèvement des termes de degré supérieur à 5

$$\frac{1}{\cos(x)} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o\left(x^5\right).$$

2. On peut déduire le développement limité d'ordre 5, $DL_5(0)$, de la fonction tan. En effet, on a

$$\tan(x) = \sin(x) \times \frac{1}{\cos(x)} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o\left(x^5\right)\right).$$

Après l'enlèvement des termes de degré supérieur à 5 on trouve

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right).$$

Soient f et g deux fonctions qui possèdent un développement limité d'ordre n au voisinage de 0;
$f(x) = P(x) + o\left(x^n\right)$ et $g(x) = Q(x) + o\left(x^n\right)$.
Si $g(0) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ admet un développement limitéd'ordre n au voisinage de 0.

$$\frac{f(x)}{g(x)} = R(x) + o\left(x^n\right).$$

Le polynôme R est la partie régulière du développement limité d'ordre n de $\frac{f}{g}$ au voisinage de 0.

Le polynôme R est le quotient de la division du polynôme P par le polynôme Q *suivant les puissances croissantes* jusqu'à l'ordre n.

Exemple 98. *On peut retrouver le développement limité d'ordre* 5, *de la fonction* $tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ *en utilisant la division suivant les puissances croissantes jusqu'à l'ordre* n.

$$
\begin{array}{l|l}
-x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \\ \cline{2-2}
x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{4!} & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 \\ \cline{1-1}
-\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} & \\
\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{72} & \\ \cline{1-1}
-\frac{2}{15}x^5 - \frac{1}{72}x^7 & \\
\frac{2}{15}x^5 - \frac{x^7}{15} + \frac{x^9}{180} & \\ \cline{1-1}
\frac{19}{360}x^7 - \frac{x^9}{180} &
\end{array}
$$

Donc,

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o\left(x^5\right),$$

est le développement limité d'ordre 5, *de la fonction tan.*

Exemple 99. *Donner le développement limité d'ordre* 4, *de la fonction* $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. *On a au voisinage de* 0

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$$

et

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$$

donc

$$e^x - e^{-x} = 2x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right)$$

et

$$e^x + e^{-x} = 2 + x^2 + \frac{x^4}{12} + o\left(x^4\right)$$

En faisant la division euclidienne suivant les puissances croissantes on trouve que au voisinage de 0

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^4\right).$$

Exercice 100.

a. Déterminer le développement limité d'ordre 2, $DL_2(0)$, de la fonctione $f(x) = e^{e^x}$.

b. Déterminer le développement limité d'ordre 2, $DL_2(0)$, de la fonctione $g(x) = e^{2\cos(x)}$.

Primitive pour un développement limité

Proposition 101. *Soit* f *une fonction continue qui admet un développement limité d'ordre* n *au voisinage de* 0 *;*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + o\left(x^n\right).$$

Si F *est une primitive de* f *alors* F *admet un développement limité au voisinage de* 0 *d'ordre* $n+1$ *telle que*

$$F(x) = F(0) + a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + ... + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Exemple 102. - *On a le développement limité au voisinage de* 0 *d'ordre* n *de la fonction*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + .. + (-1)^n x^n + o\left(x^n\right).$$

La fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ *est une primitive de la fonction* $\mapsto \dfrac{1}{1+x}$, *qui s'annulle en* 0 *par conséquent elle admet un développement limité d'ordre* $n+1$ *donné par*

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - .... + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

On obtient le développement limité d'ordre n

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{(-1)^{n-1} x^{n}}{n} + o\left(x^{n}\right).$$

- De même, on a le développement limité au voisinage de 0 d'ordre n de la fonction

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^p x^{2p} + \cdots + o\left(x^n\right).$$

La fonction $\arctan$ *est une primitive de* $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$, *par conséquent admet un développement limité d'ordre $n+1$ donné par*

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{(-1)^p x^{2p+1}}{2p+1} + \cdots + o\left(x^{n+1}\right).$$

- Du développement limité de la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{\frac{-1}{2}}$ *au voisinage de* 0,

$$(1-x^2)^{\frac{-1}{2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p)}x^{2p} + o(x^{2p+1});$$

on obtient le développement limité de $\arcsin$ *d'ordre $2p+2$ au voisinage de 0 et donné par*

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p)}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o\left(x^{2p+2}\right).$$

- Du développement limité de la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ *au voisinage de* 0,

$$(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{1.3}{2.4}x^4 + \cdots + (-1)^p\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p)}x^{2p} + o\left(x^{2p+1}\right);$$

on obtient le développement limité de $\operatorname{argsh}(x)$ *d'ordre $2p+2$ au voisinage de* 0,

$$\operatorname{argsh}(x) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}x^5 + \cdots + (-1)^p\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2p-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2p)}\frac{x^{2p+1}}{2p+1} + o\left(x^{2p+2}\right).$$

Dérivation

Proposition 103. *Soit F une fonction de classe C^{n+1} qui admet un développement limité au voisinage de 0 d'ordre $n+1$ donné par*

$$F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_{n+1}x^{n+1} + o\left(x^{n+1}\right).$$

Si F est une primitive de f alors f admet un développement limité au voisinage de 0 d'ordre n donné par

$$f(x) = a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \cdots + (n+1)a_{n+1}x^n + o\left(x^n\right).$$

3.1.4 Développement limité au voisinage de ∞

Définition 104. *Soit f une fonction définie sur $]a,\infty[$ ou sur $]-\infty,a[$ avec $a>0$, on dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de ∞ si f peut s' écrire sous la forme*

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o(x^n).$$

Pour déterminer un développement limité au voisinage de ∞ d'ordre n de la fonction f, On pose $X = \dfrac{1}{x}$ et on détermine le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de la fonction $g(X) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$, puis on remplace X par $\dfrac{1}{x}$.

Exemple 105. *Donner le développement limité au voisinage de ∞ d'ordre 4 de la fonction*

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x^2}.$$

On pose $X = \dfrac{1}{x}$, on a alors

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + x^2 + 1}}{x^2} = \frac{X^2\sqrt{1 + X^3 + X^4}}{X^2} = \left(1 + X^3 + X^4\right)^{\frac{1}{2}}$$

et puisque pour X au voisinage 0 on a

$$\left(1 + X^3 + X^4\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{2}X^4 + o\left(X^4\right)$$

alors au voisinage de ∞ on a

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Application au représentation graphique.

Soit le $DL_n(\pm\infty)$ de la fonction f ; cà d,

$$f(x) = ax + b + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o\left(x^n\right),$$

alors la droite $y = ax + b$ est une asymptote à la courbe $y = f(x)$ au voisinage de $\pm\infty$.

Pour déterminer l'équation de l'asymptote, on cherche le développement de la fonction $\dfrac{f(x)}{x}$ au voisinage de $\pm\infty$. La position de la courbe par rapport à la tangente est donnée par le signe de a_1 si $a_1 \neq 0$, sinon, le signe a_2 si $a_2 \neq 0$ ... etc.

Exemple 106. *On considère la fonction définie par*

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(x-2)},$$

On a $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2(x-2)} = \infty$.
On cherche alors le développement limité au voisinage de ∞ de la fonction

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x^{\frac{2}{3}}(x-2)^{\frac{1}{3}}}{x} = \left(\frac{x-2}{x}\right)^{\frac{1}{3}},$$

donc on utilise le $DL_2(0)$ de la fonction $x \mapsto (1-x)^\alpha$ et on trouve

$$\frac{f(x)}{x} = \left(1 - \frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{3}\left(-\frac{2}{x}\right) + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2}\left(-\frac{2}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right) = 1 - \frac{2}{3x} - \frac{4}{9x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

D'où

$$f(x) = x - \frac{2}{3} - \frac{4}{9x} + o(\frac{1}{x}),$$

on déduit que la droite $y = x - \dfrac{2}{3}$ est une asymptote oblique à la courbe $y = \sqrt[3]{x^2(x-2)}$.
Puisque

$$f(x) - \left(x - \frac{2}{3}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{4}{9x} \leq 0$$

alors la courbe de la fonction f est au dessous de la tangente $y = x - \frac{2}{3}$ au voisinage de $+\infty$.
De même, on démontre que la courbe de la fonction f est au dessus de la tangente $y = x - \frac{2}{3}$ au voisinage de $-\infty$.

3.2 Exercices

Exercice 1.

1. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\ ;\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-\frac{x^2}{2}}{\sin(x)-x};\quad \lim_{x\to +\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x^2}\ ;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln^{100}(x)}{\sqrt[100]{x}}$$
$$\lim_{x\to 0}(\sin(x))^{\cot(x)}\ ;\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-x)(e^x-1)-x^2}{(\sin(x))^2-x};\quad \lim_{n\to +\infty}\left(\frac{n}{2+n}\right)^{n+\frac{1}{2}}\ ;\quad \lim_{x\to 1}\frac{1-(x-1)^{\sin(\pi x)}}{x^7-1}.$$

2. Donner le Développement à l'ordre 3 limité au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x)=\sqrt[n]{1+\ln(1-\sin(x))},\qquad \text{avec } n\in\mathbb{N}^*$$

3. Calculer la limite suivante

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(x)-\sin(x)}{\arcsin(x)-\tan(x)}.$$

Exercice 2.

On considère la fonction définie par

$$f(x)=\frac{1}{x}\left(2\sin(x)+e^x-\cos(x)\right).$$

1. Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de f. Déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.

2. On considère la fonction g le prolongement de f par la continuité en 0 :

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si}\quad x\neq 0\\ g(0)=3 & \end{cases}$$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point $(0,g(0))$, ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente au voisinage de ce point.
de ce point.

Exercice 3.

En utilisant le développement limité au voisinge de ∞, calculer :

1. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{1}{e}-\left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right).$

2. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt{x^2-x-1}\right).$

Exercice 4.

En utilisant les développements limités, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)+4\sin^3(x)-3\ln(1+x)}{(e^x-1)\sin(x)},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x}\left(1+\frac{x}{2}\right)\ln(1+x)}{\cos(x)+\sin(x)-e^x},$$

et

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sinh(x)-2\sinh(2x)+\sinh(3x)}{\ln\left(1+x+2x^2\right)+\sqrt{1-2x}-2-x^2}.$$

Exercice 5.

Déterminer le développement limité au voisinage de 0, à l'ordre 4 de la fonction

$$f(x)=(x-\ln(1+x))\,(e^x-\cos(x)).$$

En déduire $f'(0)$, $f''(0)$, $f^{(3)}(0)$ et $f^{(4)}(0)$.

Devoirs

Devoir No 1.

On considère les fonctions suivantes

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Déterminer le domaine de définition des deux fonctions.

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1.$$

Si les points $(\cos(x), \sin(x))$ sont situés sur le cercle trigonométrique, sur quelle courbe sont situés les points $(\cosh(x), \sinh(x))$. ?

3. Déterminer les limites à l'infini des deux fonctions.

4. Déterminer les dérivées des deux fonctions.

5. Tracer les graphes des deux fonctions.

6. Démontrer que l'image de la fontion cosh est égale à $[1, \infty[$.

7. Démontrer que la fonction $\cosh : [0, \infty[\to [1, \infty[$ admet tne fonction réciproque $\cosh^{-1}$ qu'on note $\text{argch} : [1, \infty[\to [0, \infty[$.

8. Déterminer la dérivée de la fonction argch.

9. Tracer le graphe de la fonction argch.

10. Démontrer que pour tout $x \geq 1$,

$$\text{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

11. Déterminer l'image de la fontion sinh.

12. Démontrer que la fonction sinh admet une fonction réciproque $\sinh^{-1}$, notée argsh.

13. Déterminer la dérivée de la fonction argsh.

14. Tracer le graphe de la fonction argsh.

15. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\text{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

16. On considère la fonction

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

16.1. Tracer le graphe de la fonction $\tanh(x)$.

16.2. Démontrer que la fonction tanh admet tne fonction réciproque $\tanh^{-1}$, qu'on note, argth.

16.3. Déterminer la dérivée de la fonction argth.

16.4. Tracer le graphe de la fonction argth.

16.5. Démontrer que pour tout $]-1,1[$

$$\operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

17. On appelle cosh et sinh fonctions hyperboliques. Justifier cette définition.

Devoir 2.

1. Calculer, si elles existent, les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan(3x)}{\arcsin(x)},\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\left(\sin^3(x)\right)}{\frac{\pi}{2}-x},\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{7^{\sqrt{x}}-1}{2^{\sqrt{x}}-1},$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cosh(x)-1}{x^2}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan(x)\ln(\sin(x)),\quad \lim_{x\to 0^+}(x+1)^{\cot(x)},$$
$$\lim_{x\to 0^+}(\sin(x))^x.$$

2. Etudier la continuité en 0 des fonctions suivantes

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(x) & \text{si} \quad x>0 \\ 0 & \text{si} \quad x=0 \\ e^x-1 & \text{si} \quad x<0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{1-x}} & \text{si} \quad x>1 \\ 0 & \text{si} \quad x\leq 1. \end{cases}$$

3. Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ f(0)=0. \end{cases}, \qquad g(x) = \begin{cases} x|x|\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x\neq 0 \\ f(0)=0. \end{cases}$$

4. Déterminer a et b pour que la fonction f soit continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^a\sin\left(\frac{b}{x}\right) & \text{si} x\neq 0 \\ f(0)=0. \end{cases}.$$

5. Onconsidère la fonction $f(x) = x-7+\ln(x)$.

5.1. Montrer que f est bijective de $]0,+\infty[$ vers un intervalle J.

5.2. Déterminer J et calculer

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f^{-1}(x)}{x}.$$

5.3. Déterminer les branches infinies de f^{-1}.

5.4. Montrer que l'équation $f(x)=-5$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1,2]$.

5.5. Donner le développement limité de f à l'ordre 4 au voisinage de 1.

6. Donner le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 1 de la fonction

$$g(x) = \sin(f(x)+6x).$$

Corrections des devoirs

Devoir 1.

On considère les fonctions suivantes

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Puisque la fonction exponentielle est définie sur $\mathbb{R}$ alors les deux fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ alors on a

$$\begin{array}{rcl} \cosh^2(x) - \sinh^2(x) & = & (\cosh(x) - \sinh(x))\,(\cosh(x) + \sinh(x)) \\ & = & e^{-x} \times e^x \\ & = & 1. \end{array}$$

On pose $X = \cos(x)$ et $Y = \sin(x)$ alors le fait que $X^2 + Y^2 = 1$ montre que le point de coordonnées (X, Y) appartient au cercle unité. De même si on pose $X = \cosh(x)$ et $Y = \sinh(x)$ alors on a $X^2 - Y^2 = 1$ qui est l'équation de l'hyperbole.

3. Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = \infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ alors

$$\lim_{x \to \pm\infty} \cosh(x) = \lim_{x \to +\infty} \sinh(x) = +\infty$$

et

$$\lim_{x \to \infty} \sinh(x) = -\infty.$$

4. Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $(e^{\pm x})' = \pm e^{\pm x}$ alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh'(x) = \sinh(x) \qquad \text{et} \qquad \sinh'(x) = \cosh(x).$$

5. Le graphe

6. Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\cosh^2(x) = 1 + \sinh^2(x)$, $\sinh^2(x) \geq 0$ et $\cosh(x) > 0$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\cosh(x) \geq 1;$$

D'où

$$\cosh(\mathbb{R}) = [1, +\infty.$$

7. On a $\cosh([0, +\infty[) = [1, +\infty$ alors cosh est surjective sur $\mathbb{R}^+$ et $\cosh'(x) = \sinh(x) > 0$ pour tout $x > 0$ donc cosh est strictement croissante et par conséquent cosh est bijective et admet une fonction réciproque, notée argch.

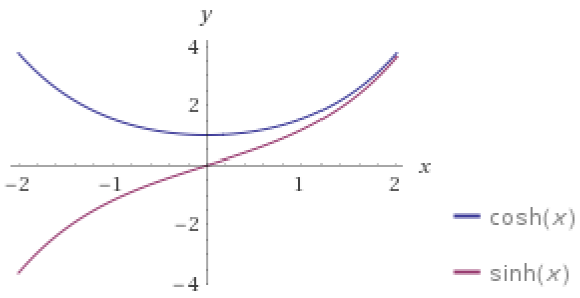

Figure 3.1 – Le graphe des fonctions sinh (rouge) et cosh (bleu)

8. Soit $x \geq 1$, alors

$$\cosh(\mathrm{argch}(x)) = x \Longrightarrow \mathrm{argch}'(x)\cosh'(\mathrm{argch}(x)) = 1 \Longrightarrow \mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\sinh(\mathrm{argch}(x))}.$$

Or

$$\sinh(\mathrm{argch}(x)) = \sqrt{\cosh^2(\mathrm{argch}(x)) - 1} = \sqrt{x^2 - 1};$$

Donc

$$\mathrm{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \qquad \forall x \geq 1.$$

9. Le graphe de argch

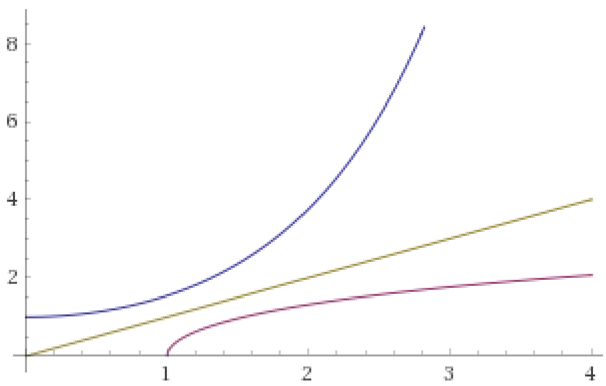

Figure 3.2 – Le graphe des fonctions cosh (bleu), *argch* (rouge) et la première bissectrice $y = x$ (vert)

10. Soit $x \in]1, +\infty[$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$ alors

$$\begin{aligned} \mathrm{argch}(x) = y &\Longleftrightarrow \cosh(y) = x \\ &\Longleftrightarrow e^y + e^{-y} = 2x \\ &\Longleftrightarrow e^{2y} - 2xe^y + 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow Y^2 - 2xY + 1 = 0 \end{aligned}$$

On a $\delta = 4(x^2 - 1)$ alors

$$Y = x + \sqrt{x^2-1} \qquad \text{ou} \qquad Y = x - \sqrt{x^2-1}.$$

Mais puisque pour tout $x > 1$ on a $0 < x - \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} < 1$, alors la seule solution convenable est

$$Y = x + \sqrt{x^2-1} \Longleftrightarrow \mathrm{argch}(x) = \ln(Y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right).$$

11. Puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sinh'(x) = \cosh(x) > 0$ alors la fonction sinh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et puisque elle est continue sur $\mathbb{R}$ alors

$$\sinh(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x\to-\infty} \sinh(x), \lim_{x\to+\infty} \sinh(x) \right[= \mathbb{R}.$$

12. D'après ce qui précéde sinh est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit argsh sa fonction réciproque.

13. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\sinh(\operatorname{argsh}(x)) = x \iff \operatorname{argsh}'(x)\sinh'(\operatorname{argsh}(x)) = 1 \iff \operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\cosh(\operatorname{argsh}(x))}.$$

Or

$$\cosh(\operatorname{argsh}(x)) = \sqrt{\sinh^2(\operatorname{argsh}(x)) + 1} = \sqrt{x^2+1}.$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0.$$

14. Le graphe de la fonction argsh

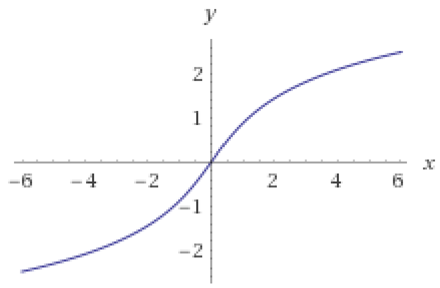

FIGURE 3.3 – Le graphe de la fonction argsh (bleu)

15. Soient $x, y \in \mathbb{R}$, alors on a

$$\begin{aligned} \operatorname{argsh}(x) = y &\iff \sinh(y) = x \\ &\iff e^y - e^{-y} = 2x \\ &\iff e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0 \\ &\iff Y^2 - 2xY - 1 = 0 \end{aligned}$$

On a $\Delta = 4(x^2+1)$ donc

$$Y = x - \sqrt{x^2+1} \qquad \text{ou} \qquad Y = x + \sqrt{x^2+1}.$$

Puisque $\lim_{y\to+\infty} Y = +\infty$ donc la solution convenable est

$$Y = x + \sqrt{x^2+1} \iff \operatorname{argsh}(x) = \ln(Y) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

16. On considère la fonction

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

16.1. Le grahe de la fonction tanh

16.2. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors la fonction tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient et somme des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (donc en particulier continue) et

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \frac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x).$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $0 < \tanh'(x) \leq 1$ donc tanh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, elle admet une fonction réciproque, notée argth, définie de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.

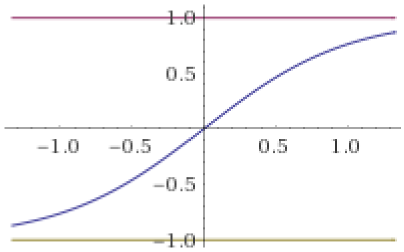

FIGURE 3.4 – Le graphe de la fonction tanh (bleu) et les assymptotes horizontales $y = 1$ (rouge) et $y = -1$ (vert)

16.3. Soit $x \in]-1, 1[$, alors

$$\tanh(\mathrm{argth}(x)) = x \Longrightarrow \mathrm{argth}'(x)\tanh'(\mathrm{argth}(x)) = 1 \Longleftrightarrow \mathrm{argth}'(x) = \frac{1}{1-\tanh^2(\mathrm{argth}(x))} = \frac{1}{1-x^2}.$$

16.4. Le graphe de la fonction argth.

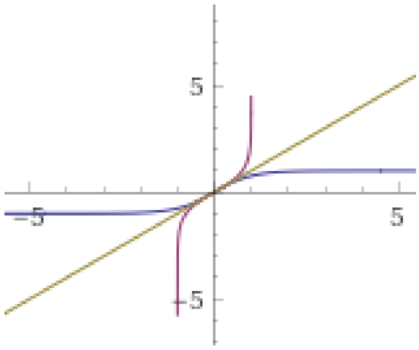

FIGURE 3.5 – Le graphe des fonctions : tanh (bleu), argth (rouge) et la première bissectrice $y = x$ (vert)

16.5. Soient $x \in]-1, 1[$ et $y \in \mathbb{R}$ alors

$$\begin{aligned} \mathrm{argth}(x) = y &\Longleftrightarrow \tanh(y) = x \\ &\Longleftrightarrow e^y - e^{-y} = x\,(e^y + e^{-y}) \\ &\Longleftrightarrow (1-x)e^y = (1+x)e^{-y} \\ &\Longleftrightarrow e^{2y} = \tfrac{1+x}{1-x} \\ &\Longleftrightarrow y = \tfrac{1}{2}\ln\left(\tfrac{1+x}{1-x}\right). \end{aligned}$$

Donc pour tout $|x| < 1$,

$$\mathrm{argth}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

17. On appelle cosh et sinh fonctions hyperboliques car elles définissent une paramétrisation d'une courbe hyperbolique dans le plan euclidien.

Devoir 2.

1. Calculs des limites :

(a) Puisque $\arctan(3x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$ et $\arcsin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$ alors

$$\frac{\arctan(3x)}{\arcsin(x)} \underset{x\to 0}{\sim} 3 \Longleftrightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\arctan(3x)}{\arcsin(x)} = 3.$$

(b) Puisque $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$ alors

$$\ln\left(\sin^3(x)\right) = 3\ln(\sin(x)) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} 3(\sin(x)-1).$$

Donc

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{3\ln(\sin(x))}{x-\frac{\pi}{2}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} 3\frac{\sin(x)-1}{x-\frac{\pi}{2}} = 3\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x-\frac{\pi}{2}} = 3\sin'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

(c) Puisque $7^{\sqrt{x}}-1 = e^{\sqrt{x}\ln(7)}-1 \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{x}\ln(7)$ et de même $2^{\sqrt{x}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \sqrt{x}\ln(2)$ alors

$$\frac{7^{\sqrt{2}}-1}{2^{\sqrt{x}}-1} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\ln(7)}{\ln(2)}.$$

Donc

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{7^{\sqrt{2}}-1}{2^{\sqrt{x}}-1} = \log_2(7).$$

(d) Puisque, pour x au voisinage de 0, on a

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^4)$$

alors

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(x)-1}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

(e) Puisque $\ln(x) \underset{x\to 1}{\sim} x-1$ alors $\ln(\sin(x)) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \sin(x)-1$; donc,

$$\tan(x)\ln(\sin(x)) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \tan(x)(\sin(x)-1) = \sin(x)\frac{\sin(x)-1}{\cos(x)}.$$

Par conséquent, en utilisant la règle d'Hopital on trouve

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x)\ln(\sin(x)) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = 0.$$

(f) Puisque pour tout $x>0$ on a

$$(x+1)^{\cot(x)} = e^{\cot(x)\ln(x+1)} = e^{\cos(x)\frac{\ln(x+1)}{x}\frac{x}{\sin(x)}},$$

et puisque

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0^+} \cos(x) = 1$$

alors

$$\lim_{x\to 0^+} (x+1)^{\cot(x)} = e.$$

g. Puisque pour tout $0<x<\pi$ on a

$$(\sin(x))^x = e^{x\ln(\sin(x))} = e^{\frac{x}{\sin(x)}\ \sin(x)\ln(\sin(x))}$$

alors

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin(x))^x = 1.$$

Car

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin(x)} = 1 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} \sin(x)\ln(\sin(x)) = \lim_{t\to 0^+} t\ln(t) = 0.$$

2. Puisque
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 = f(0)$$
et
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-1} (e^x - 1) = 0 = f(0)$$
alors f est continue en 0.
D'une autre part, puisque
$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{y\to -\infty} e^y = 0 = f(0) = \lim_{x\to 0^-} g(x)$$
alors g est continue en 0.

3. Les fonctions f et g sont toutes dérivables (donc continues) sur $\mathbb{R}^*$ comme somme, quotient et composée des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. Il manque d'étudier la continuité et la dérivabilité de f et g en 0.

La continuité. On a
$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} = 0 = f(0).$$
Donc f est continue en 0 donc sur $\mathbb{R}$.
On a
$$\lim_{x\to 0} x|x|\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0} |x|\frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 0 = f(0).$$
Donc f est continue en 0.

La dérivabilité. On a
$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}} = \begin{cases} 0 & \text{en } 0^+ \\ 1 & \text{en } 0^- \end{cases}$$
Donc f n'est pas dérivable en 0. Car $f'_d(0) = 0 \neq f -_g (0) = 1$.
D'une autre part on a
$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to 0} |x|\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$
Donc g est dérivable en 0.

4. Si $b = 0$ alors f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue et dérivable pour tout $a \in \mathbb{R}$.
Si $b \in \mathbb{R}^*$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}^*$
$$|f(x)| = |x|^a \left|\sin\left(\frac{b}{x}\right)\right| \leq |x|^a.$$
Donc si $a > 0$ alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ donc continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $a \leq 0$ f n'admet pas de limite en 0 donc n'est pas continue en 0.
Conséquence : f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ si ($a > 0$ et $b \in \mathbb{R}^*$) ou si ($a \in \mathbb{R}$ et $b = 0$).

5. Onconsidère la fonction
$$f(x) = x - 7 + \ln(x).$$

5.1. Pouisque f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x) = \frac{x+1}{x} > 0$ pour tout $x > 0$ alors f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$. D'où la continuité de f assure la bijectivité de f de $\mathbb{R}_+^*$ vers J.

5.2. Alors,
$$J = f(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to 0^+} f(x), \lim_{x\to +\infty} f(x)\right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$
On pose $y = f^{-1}(x)$ alors
$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{f(y)} = \lim_{y\to +\infty} \frac{y}{y - 7 + \ln(y)} = 1.$$

5.3. Puisque $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{-1}(x)}{x} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x) - x = +\infty$ alors $(C_{f^{-1}})$ le graphe de la fonction f^{-1} admet une branche parabolique vers la droite $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

D'une autre part, on a $\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x) = 0$ alors $(C_{f^{-1}})$ admet l'axe des abscisses comme assymptôte au voisinage de $-\infty$.

5.4. Soit $g(x) = f(x) + 5 = x - 2 + \ln(x)$. Puisque $g(1) \times g(2) = (-1) \times \ln(2) < 0$ et g est continue sur $[1, 2]$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in]1, 2[$ tel que $g(c) = 0$. Par conséquent, l'équation $f(x) = -5$ admet une unique (car elle est strictement croissante) solution dans $[1, 2]$.

5.5. On a au voisinage de 1

$$\ln(x) = \ln((x-1)+1) = x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + o\left((x-1)^4\right).$$

Donc

$$f(x) = -6 + 2(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + o\left((x-1)^4\right).$$

6. Puisque au voisinage de 0 on a

$$\sin(y) = y - \frac{y^3}{3!} + o\left(y^3\right),$$

au voisinage de 1 on a

$$f(x) + 6x = 8(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + o\left((x-1)^4\right)$$

et $g(1) = \sin(0) = 0$ alors

$$g(x) = 8(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 - 85(x-1)^3 + o\left((x-1)^3\right).$$