UNIVERSITE MOHAMED 1er
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique
Oujda

SMA-SMI Semestre 2
Algèbre 2
Contrôl Final
Année 2008/2009
Durée 3 heures

**Session ordinaire du printemps 2009**

`http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2`
mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III et IV sont indépendants

Solution

I Soit $A$ un anneau. $m = Car(A)$ la caractéristique de $A$.

1 Montrer que $\forall x \in A \qquad (x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

**Réponse :** $(x+1)^2 = (x+1)(x+1) = x^2 + x + x + 1 = x^2 + 2x + 1$
$(x+1)^3 = (x+1)^2(x+1) = (x^2+2x+1)(x+1) = x^3+2x^2+x+x^2+2x+1 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
$(x+1)^4 = (x+1)^3(x+1) = x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$
$(x+1)^5 = (x+1)^4(x+1) = x^5+4x^4+6x^3+4x^2+x+x^4+4x^3+6x^2+4x+1 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1 \qquad \square$

**Autre Réponse :**(Acceptable) Comme $x$ et 1 commutent, le formule du binôme s'applique $\qquad \square$

Dans la suite, on suppose que $A$ vérifie : $\forall x \in A \qquad x^5 = x$

2 Montrer que $\forall x \in A \qquad 30x = 0$ (remplacer $x$ par $2x$)

**Réponse :** Remplaçons $x$ par $2x$, il vient $(2x)^5 = 2x$, soit $32x^5 = 2x$, soit $32x = 2x$, soit $30x = 0 \qquad \square$

3 Montrer que $m$ divise 30

**Réponse :** $\forall x \in A \qquad 30x = 0$, par définition de la caractéristique, cela entraine $m$ divise 30 $\qquad \square$

4 On suppose que $m$ divise 2

i. Montrer que $\forall x \in A \qquad 5(x^4 - x) = 0$

**Réponse :** On a

$(x+1)^5 = x+1 = x+1 = x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1 = x^5+5x^4+5x+1$

Car comme $m$ divise 2, on a $\forall x \in A \qquad 2x = 0$, donc $10x^3 = 0$ *et* $10x^2 = 0$

Donc

$$x + 1 = x^5 + 5x^4 + 5x + 1 = x + 5(x^4 + 1) + 1 \text{ } donc \qquad 5(x^4 + x) = 0$$

remplaçons $x$ par $-x$ il vient $5(x^4 - x) = 0 \qquad \square$

**Autre Réponse :** Appliquer directement la formule du binôme à $(x - 1)^5 \qquad \square$

ii. En déduire que $\forall x \in A \qquad x^4 - x = 0$

**Réponse :** On a

$$0 = 5(x^4 - x) = 4(x^4 - x) + (x^4 - x) = 0 + (x^4 - x) \qquad \square$$

iii. En déduire que $\forall x \in A \qquad x^2 = x$ (On rappel que comme conséquence, d'après TD, $A$ est commutatif)

**Réponse :** On a $x^4 = x$, donc $x^5 = x^2$ soit $x^2 = x \qquad \square$

5 On suppose que $m$ divise 3

i. Montrer que $\forall x \in A \qquad 5(x^4 + x) = -10(x^3 + x^2)$

**Réponse :** On a

$x+1 = (x+1)^5 = x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1 = x+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1$

donc

$$5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x = 0$$

donc

$$5(x^4 + x) = -10(x^3 + x^2) \qquad \square$$

ii. En déduire que $\forall x \in A \qquad x^4 + x = x^2 + x^3$

**Réponse :** Comme $m$ divise 3, on a $\forall x \in A \qquad 3x = 0$, donc

$$5(x^4 + x) = (6 - 1)(x^4 + x) = 6(x^4 + x) - (x^4 + x) = 0 - (x^4 + x)$$

de même

$$-10(x^3 + x^2) = (-9 - 1)(x^3 + x^2) = 0 - (x^3 + x^2)$$

donc

$$-(x^4 + x) = -(x^3 + x^2)$$

donc

$$x^4 + x = x^3 + x^2 \qquad \square$$

iii. En déduire que $\forall x \in A \qquad 2x^4 = 2x^2$

**Réponse :** On a $\forall x \in A \qquad x^4 + x = x^3 + x^2$, remplaçons $x$ par $-x$ il vient aussi $\forall x \in A \qquad x^4 - x = x^2 - x^3$, additionnant membre à membre les deux égalités, il vient :

$$\forall x \in A \qquad 2x^4 = 2x^2 \qquad \square$$

iv. En déduire que $\forall x \in A \qquad x^3 = x$ (On rappel que comme conséquence, d'après la session de Juin 2008, $A$ est commutatif)

**Réponse :** Toujours parceque $m$ divise 3, on a $2x^4 = (3 - 1)x^4 = -x^4$. De même $2x^2 = -x^2$, donc $-x^4 = -x^2$, donc $x^4 = x^2$, donc $x^5 = x^3$ donc $x^3 = x \qquad \square$

6 On suppose que $m$ divise 5, Soient $x, y \in A$, soit $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

i. En écrivant $(nx + y)^5 = nx + y$, déduire qu'il existent $A_1, A_2, A_3, A_4 \in A$ tel que

$$(*) \qquad n^4A_1 + n^3A_2 + n^2A_3 + nA_4 = 0$$

**Réponse :** Tenant compte que $x, y$ ne commutent pas nécessairement , on a

$$(nx+y)^5 = (nx+y)(nx+y)^2(nx+y)^2$$

soit

$$(nx+y)^5 = (nx+y)(n^2x^2 + n(xy+yx) + y^2)(n^2x^2 + n(xy+yx) + y^2)$$

soit

$$(nx+y)^5 = n^5x^5 + n^4A_1 + n^3A_2 + n^2A_3 + nA_4 + y^5$$

$$A_1 = x^4y + x^3yx + x^2yx^2 + xyx^3 + yx^4$$

$$A_2 = x^3y^2 + x^2y^2x + xy^2x^2 + y^2x^3 + x^2yxy + xyx^2y + yx^3y + yxyx^2 + xyxyx + yx^2yx$$

$$A_3 = y^3x^2 + y^2x^2y + yx^2y^2 + x^2y^3 + y^2xyx + yxy^2x + xy^3x + xyxy^2 + yxyxy + xy^2xy$$

$$A_4 = y^4x + y^3xy + y^2xy^2 + yxy^3 + xy^4$$

On a donc

$$nx + y = (nx+y)^5 = n^5x^5 + n^4A_1 + n^3A_2 + n^2A_3 + nA_4 + y^5$$

$$= nx + n^4A_1 + n^3A_2 + n^2A_3 + nA_4 + y$$

car $n^5x^5 = (nx)^5 = nx$, donc

$$n^4A_1 + n^3A_2 + n^2A_3 + nA_4 = 0 \qquad \square$$

ii. Montrer que $A_1 = x^4y + x^3yx + x^2yx^2 + xyx^3 + yx^4$

iii. Calculer $xA_1 - A_1x$

**Réponse :**

$$xA_1 - A_1x = x(x^4y + x^3yx + x^2yx^2 + xyx^3 + yx^4) - (x^4y + x^3yx + x^2yx^2 + xyx^3 + yx^4)x$$

$$= xy - yx \qquad \square$$

iv. Montrer que $A_1 = 0$ (on pourra sommer la relation (*) pour $n = 1, 2, 3, 4$)

**Réponse :** Avec $n = 1, 2, 3, 4$ il vient :

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$$

$$16A_1 + 8A_2 + 4A_3 + 2A_4 = 0 \qquad soit \qquad A_1 + 3A_2 + 4A_3 + 2A_4 = 0$$

$$81A_1 + 27A_2 + 9A_3 + 3A_4 = 0 \qquad soit \qquad A_1 + 2A_2 + 4A_3 + 3A_4 = 0$$

$$256A_1 + 64A_2 + 16A_3 + 4A_4 = 0 \qquad soit \qquad A_1 + 4A_2 + A_3 + 4A_4 = 0$$

Additionnant les quatre égalités, il vient $4A_1 = 0$, soit $-A_1 = 0$, donc $A_1 = 0$ □

v. En déduire que $A$ est commutatif

**Réponse :** $0 = xA_1 - A_1x = xy - yx$ □

7 Pour $n \in \mathbb{Z}$ on note $nA = \{nx \mid x \in A\}$. On a admet que $10A, 6A, 15A$ sont des anneaux pour les lois induitent respectivement par + et .

i. Montrer que $Car(10A)$ divise 3, $Car(6A)$ divise 5, $Car(15A)$ divise 2

**Réponse :** On a $3(10A) = 30A = \{0\}$, donc $Car(10A)$ divise 3 □

ii. Montrer $A$ est commutatif.

**Réponse :** D'après 6,5 et 4 on a $6A$,$10A$ et $15A$ commutatifs, donc $\forall x, y \in A$, on a

$$6x6y = 6y6x \qquad (1)$$

$$10x10y = 10y10x \qquad (2)$$

$$15x15y = 15y15x \qquad (3)$$

On a $pgcd(6, 10, 15) = 1$, donc $pgcd(6^2, 10^2, 15^2) = 1$, donc il existe $u, v, w \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$u6^2 + v10^2 + w15^2 = 1$$

Formons $u(1) + v(2) + w(3)$, il vient

$$xy = yx \qquad \square$$

II Soit dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction

$$F = \frac{X^4}{(X^2 + X + 1)(X - 1)^2}$$

1 Montrer que $pgcd(X^2 + X + 1, (X - 1)^2) = 1$

**Réponse :**

| | | |
|---|---|---|
| $X^2 + X + 1$ | $X^2 - 2X + 1$ | $3X$ |
| $X^2 - 2X + 1$ | $1$ | $X/3 - 2/3$ |
| $3X$ | $X^2$ | |
| | $-2X + 1$ | |
| | $-2X$ | |
| | $1 \neq 0$ | |

Donc $X^2 + X + 1$ et $X^2 - X - 2$ sont premiers entre eux. $\square$

2 Trouver $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$U(X^2 + X + 1) + V(X - 1)^2 = 1$$

**Réponse :** Posons $A = X^2 + X + 1$ et $B = X^2 - 2X + 1$, on a donc

$$A = B + 3X$$

$$B = (3X)(X/3 - 2/3) + 1$$

Donc

$$B = (A - B)(X/3 - 2/3) + 1$$

Donc

$$(X/3 + 1/3)B - A(X/3 - 2/3) = 1$$

On peut aussi permuter les rôles de $A$ et $B$, cela donne

$$\begin{array}{c|c|c}
X^2 - 2X + 1 & X^2 + X + 1 & -3X \\ \cline{2-3}
X^2 + X + 1 & 1 & -X/3 - 1/3 \\ \cline{1-2}
-3X & X^2 & \\ \cline{2-2}
 & X + 1 & \\
 & X & \\ \cline{2-2}
 & 1 \neq 0 &
\end{array}$$

Donc $B = A - 3X$ et $A = (-3X)(-X/3 - 1/3) + 1$ d'où on tire la même relation

$$(X/3 + 1/3)B - A(X/3 - 2/3) = 1 \qquad \square$$

3 Décomposer $F$ en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

**Réponse :**
Multiplions cette relation par $X^4$ et divisons par $AB$ il vient

$$F = \frac{X^4(X+1)}{3(X^2+X+1)} - \frac{X^4(X-2)}{3(X^2-2X+1)}$$

4 Pour décomposer $F$ en éléments simples, il suffit de décomposer chacune de ses composantes

$$\frac{X^4(X+1)}{3(X^2+X+1)} \text{ et } \frac{X^4(X-2)}{3(X^2-2X+1)}$$

et soustraire les deux résultats.

- Décomposition de $\dfrac{X^4(X+1)}{3(X^2+X+1)}$

  On calcul le quotient de la division euclidiènne de

$$X^4(X+1)/3 \; par \; X^2 + X + 1$$

$$
\begin{array}{c|l}
X^5+X^4 & X^2+X+1 \\
\cline{2-2}
X^5+X^4+X^3 & X^3-X+1 \\
\cline{1-1}
-X^3 & \\
-X^3-X^2-X & \\
\cline{1-1}
X^2+X & \\
X^2+X+1 & \\
\cline{1-1}
-1 &
\end{array}
$$

Donc

$$X^5+X^4=(X^3-X+1)(X^2+X+1)-1$$

Donc

$$(X^5+X^4)/3=(X^3-X+1)(X^2+X+1)/3-1/3$$

D'où la décomposition

$$\frac{X^4(X+1)}{3(X^2+X+1)}=(X^3-X+1)/3-\frac{1}{3(X^2+X+1)}$$

- Décomposition de $\frac{X^4(X-2)}{3(X^2-2X+1)}$

On calcul le quotient de la division euclidiènne de

$$X^4(X-2)/3 \; par \; X^2-2X+1$$

$$X^4(X-2)/3=(X^2-2X+1)(X^3-X-2)/3+(-3X+2)/3$$

et on a

$$X^2-2X+1=(X-1)^2$$

Par suite la décomposition de $\frac{X^4(X-2)}{3(X^2-2X+1)}$ s'écrit

$$\frac{X^4(X-2)}{3(X^2-2X+1)}=(X^3-X-2)/3+\frac{\alpha}{(X-1)^2}+\frac{\beta}{X-1}$$

$$\alpha=\frac{X^4(X-2)}{3}(1)=\frac{-1}{3}$$

$$\frac{X^4(X-2)}{3(X^2-2X+1)}+\frac{1}{3(x-1)^2}=\frac{X^5-2X^4+1}{3(X-1)^2}=\frac{X^4-X^3-X^2-X-1}{3(X-1)}$$

Donc

$$\frac{X^5-2X^4+1}{3(X-1)^2}=\frac{X^4-X^3-X^2-X-1}{3(X-1)}=(X^3-X-2)/3+\frac{\beta}{X-1}$$

$$\beta=\frac{X^4-X^3-X^2-X-1}{3}(1)=-1$$

D'où la décomposition de $F$

$$F = 1 - \frac{1}{3(X^2+X+1)} + \frac{1}{3(X-1)^2} + \frac{1}{X-1}$$

On peut aussi décomposer directement $F$

$$F = Q + \frac{aX+b}{X^2+X+1} + + \frac{\alpha}{(X-1)^2} + \frac{\beta}{X-1}$$

$Q$ est le quotient de la division euclidienne de $X^4$ par $(X^2+X+1)(X^2-2X+1) = X^4 + \ldots$, soit $Q = 1$
On pose $h = X - 1$, alors

$$\frac{X^4}{X^2+X+1} = \frac{(1+h)^4}{(1+h)^2+(1+h)+1} = \frac{1+4h+O(h^2)}{3+3h+O(h^2)} = \frac{1}{3} + h + O(h^2)$$

d'où $\alpha = \dfrac{1}{3}$ et $\beta = 1$
Calcul de $aX + b$

- Méthode 1

  On a

  $$(X^2+X+1)F = \frac{X^4}{X^2-2X+1}$$

  On cherche $U$ tel que

  $$U(X^2-2X+1) = 1 - V(X^2+X+1)$$

  On a trouvé $U = -\dfrac{1}{3}(X+1)$. Alors $aX+b$ est le reste de $UX^4$ par $X^2+X+1$

  On trouve

  $$aX + b = \textit{reste de } X^4U \textit{ par } X^2+X+1 = - - \frac{1}{3}$$

- Méthode 2 (Méthode par developpement limité)

  On pose $h = X^2 + X + 1$, on cherche un "developpement limité" à l'ordre 1 de $X^4/(X^2-X-2)$ en $h$. On a

  $$\frac{X^4}{X^2-2X+1} = \frac{(h-X-1)^2}{-3X+O(h)} = \frac{(X+1)^2+O(h)}{-3X+O(h)}$$

Soit

$$\frac{X^4}{X^2-X-2} = \frac{X+O(h)}{-3X+O(h)} = \frac{X(X+1)+O(h)}{-3X(X+1)+O(h)}$$

Soit

$$\frac{X^4}{X^2-X-2} = \frac{-1+O(h)}{3+O(h)} = -\frac{1}{3}+O(h)$$

Donc

$$aX+b == -\frac{1}{3}$$

Autre méthode de décomposition de $F$

$$F = \frac{X^4}{(X^2+X+1)(X-1)(X-1)}$$

et on applique la formule du cours :

$$\frac{1}{(X-\alpha)(X^2+aX+b)} = \frac{1}{\alpha^2+a\alpha+b}(\frac{1}{X-\alpha} - \frac{X+a+\alpha}{X^2+aX+b})$$

III Soit $K$ un corps commutatif. Soient $A \in M_{m,n}(K)$ une matrice $(m,n)$, $B \in M_{p,q}(K)$ une matrice $(p,q)$

1 A quelle condition le produit $AB$ est définit

**Réponse :** $n = p$ $\square$

2 A quelle condition les produit $AB$ et $BA$ sont définis

**Réponse :** $n = p \qquad q = m$ $\square$

3 Pour une matrice carrée $C = (a_{ij})$, on appel trace de $A$ le scalaire $tr(C) = \sum_i a_{ii}$. Montrer que si $AB$ et $BA$ sont définis, alors

$$tr(AB) = tr(BA)$$

**Réponse :** Posons $AB = (c_{ij}) \in M_m(K)$ et $BA = (c'_{ij}) \in M_n(K)$

$$tr(AB) = \sum_{i=1}^{m} c_{ii} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ki}a_{ik} = \sum_{k=1}^{n} c'_{kk} = tr(BA) \qquad \square$$

4 On suppose $AB$ et $BA$ définis. Montrer que si $I - AB$ est inversible , alors $I' - BA$ est inversible. ($I$ et $I'$ matrices identité)(On cherchera son inverse sous la forme $I' + BXA$, $X$ matrice à préciser)

**Réponse :** Soit $X$ l'inverse de $I - AB$, on a

$$(I' - BA)(I' + BXA) = I' - BA + BXA - BABXA = I' + B(-I + X - ABX)A$$

$$= I' + B(-I + (I - AB)X)A = I'$$

De même

$$(I' + BXA)(I' - BA) = I' \qquad \square$$

IV Soit l'application $f \ : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1 + 2x_2 - x_3, x_1 - x_2 - 3x_3)$$

1 Montrer que $f$ est linéaire.

2 Soient $B_1, B_2$ les bases canoniques respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Calculer $M_{B_1B_2}(f)$

**Réponse :**

$$M_{B_1B_2}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \qquad \square$$

3 Pour $v \in \mathbb{R}^3$ et $w \in \mathbb{R}^2$, écrire matrciellement la relation $f(v) = w$.

**Réponse :**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \square$$

4 Donner une base et la dimension de $Ker(f)$.

**Réponse :**

$$ker(f) = \left\{ (\frac{7}{3}x_3, \frac{-2}{3}x_3, 1) \mid x_3 \in \mathbb{R} \right\} = < (7, -2, 3) >$$

$$= \left\{ (\frac{-7}{2}x_2, x_2, \frac{-3}{2}x_2, 1) \mid x_2 \in \mathbb{R} \right\} =< (-7, 2, -3) >$$

$$= \left\{ (x_1, -\frac{2}{7}x_1, \frac{3}{7}x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R} \right\} =< (7, -2, 3) > \qquad \square$$

5 Donner une base et la dimension de $Im(f)$.

**Réponse :**

$Im(f) =< (1,1), (2,-1), (-1,-3) >=< (1,1), (1,-1) >=< (-1,-1), (2,-1) >$ $\square$

6 Vérifier la relation liant $dim(Ker(f))$ et $dim(Im(f))$.

**Réponse :** $dim(Im(f)) + dim(Ker(f)) = 2 + 1 = 3 = dim(E)$ $\square$