UNIVERSITE MOHAMED 1er
FACULTE DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique
Oujda

SMA-SMI Semestre 2
Algèbre 2
Contrôl Final
Année 2008/2009
Durée 3 heures

Session ordinaire du printemps 2009

http://webserver.iam.net.ma/~chellali/sma2
mustapha.chellali@gmail.com

Les Problèmes I, II , III et IV sont indépendants

I Soit A un anneau. $m = Car(A)$ la caractéristique de A.

1 Montrer que $\forall x \in A \qquad (x+1)^5 = x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$
Dans la suite, on suppose que A vérifie : $\forall x \in A \qquad x^5 = x$

2 Montrer que $\forall x \in A \qquad 30x = 0$ (remplacer x par $2x$)

3 Montrer que m divise 30

4 On suppose que m divise 2

i. Montrer que $\forall x \in A \qquad 5(x^4 - x) = 0$
ii. En déduire que $\forall x \in A \qquad x^4 - x = 0$
iii. En déduire que $\forall x \in A \qquad x^2 = x$ (On rappel que comme conséquence, d'après TD, A est commutatif)

5 On suppose que m divise 3

i. Montrer que $\forall x \in A \qquad 5(x^4 + x) = -10(x^3 + x^2)$
ii. En déduire que $\forall x \in A \qquad x^4 + x = x^2 + x^3$
iii. En déduire que $\forall x \in A \qquad 2x^4 = 2x^2$
iv. En déduire que $\forall x \in A \qquad x^3 = x$ (On rappel que comme conséquence, d'après la session de Juin 2008, A est commutatif)

6 On suppose que m divise 5, Soient $x, y \in A$, soit $n \in \{1, 2, 3, 4\}$.

i. En ecrivant $(nx + y)^5 = nx + y$, déduire qu'il existent $A_1, A_2, A_3, A_4 \in A$ tel que
$$(*) \qquad n^4 A_1 + n^3 A_2 + n^2 A_3 + n A_4 = 0$$
ii. Montrer que $A_1 = x^4 y + x^3 y x + x^2 y x^2 + x y x^3 + y x^4$
iii. Calculer $xA_1 - A_1 x$
iv. Montrer que $A_1 = 0$ (on pourra sommer la relation (*) pour $n = 1, 2, 3, 4$)
v. En déduire que A est commutatif

7 Pour $n \in \mathbb{Z}$ on note $nA = \{nx \mid x \in A\}$. On a admet que $10A, 6A, 15A$ sont des anneaux pour les lois induitent respectivement par + et .

i. Montrer que $Car(10A)$ divise 3, $Car(6A)$ divise 5, $Car(15A)$ divise 2
ii. Montrer A est commutatif.

II Soit dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction

$$F = \frac{X^4}{(X^2 + X + 1)(X - 1)^2}$$

1 Montrer que $pgcd(X^2+X+1,(X-1)^2)=1$

2 Trouver $U, V \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$U(X^2+X+1)+V(X-1)^2=1$$

3 Décomposer F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

III Soit K un corps commutatif. Soient $A \in M_{m,n}(K)$ une matrice (m,n), $B \in M_{p,q}(K)$ une matrice (p,q)

1 A quelle condition le produit AB est définit

2 A quelle condition les produit AB et BA sont définis

3 Pour une matrice carrée $C=(a_{ij})$, on appel trace de A le scalaire $tr(C)=\sum_i a_{ii}$. Montrer que si AB et BA sont définis, alors

$$tr(AB)=tr(BA)$$

4 On suppose AB et BA définis. Montrer que si $I-AB$ est inversible , alors $I'-BA$ est inversible. (I et I' matrices identité)(On cherchera son inverse sous la forme $I'+BXA$, X matrice à préciser)

IV Soit l'application $f\ :\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x_1,x_2,x_3) \longrightarrow (x_1+2x_2-x_3, x_1-x_2-3x_3)$$

1 Montrer que f est linéaire.

2 Soient B_1, B_2 les bases canoniques respectivement de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. Calculer $M_{B_1B_2}(f)$

3 Pour $v \in \mathbb{R}^3$ et $w \in \mathbb{R}^2$, écrire matrciellement la relation $f(v)=w$.

4 Donner une base et la dimension de $Ker(f)$.

5 Donner une base et la dimension de $Im(f)$.

6 Vérifier la relation liant $dim(Ker(f))$ et $dim(Im(f))$.