



Université Sultane Moulay Slimane
Faculté Polydisciplinaire
Béni Méllal

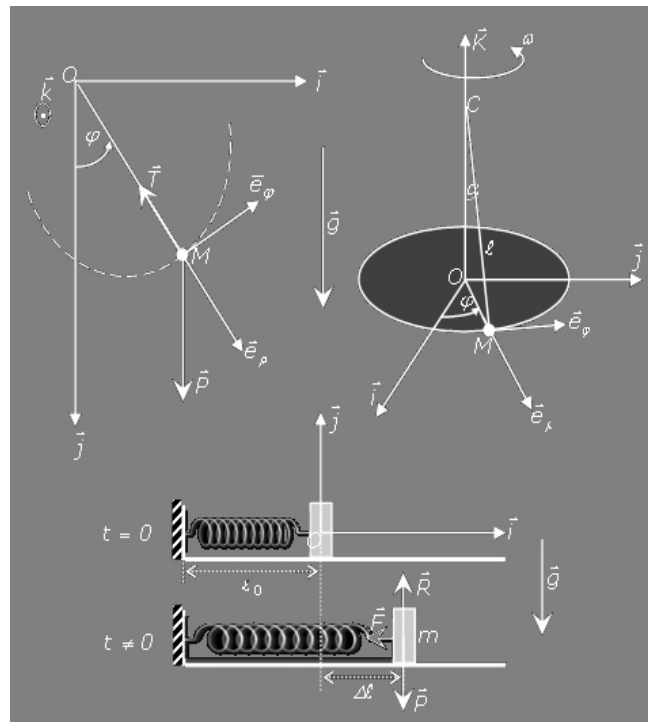


www.pdf-cours.online
FILIÈRE : SMP/SMC/SMA

MODULE : M1/M1/M4

Travaux dirigés corrigés

Mécanique du Point Matériel



Préparé par Mohamed LAMSAADI

Année universitaire 2012-2016

Série N° 1
Rappels et Compléments Mathématiques

Exercice 1

Dans un repère orthonormé direct $\mathfrak{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs :

$$\vec{v}_1 = 3\vec{i} + 3\vec{j}, \quad \vec{v}_2 = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{v}_3 = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v}_4 = 2\vec{i} - \vec{k}$$

1. Représenter les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 .
2. Calculer $\|\vec{v}_1\|$, $\|\vec{v}_2\|$ et les produits $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ et $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$.
3. Calculer l'angle formé par les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 .
4. Montrer que le vecteur \vec{v}_3 est perpendiculaire au plan (P) formé par les vecteurs \vec{v}_1 et \vec{v}_2 .
5. Montrer que le vecteur \vec{v}_4 appartient au plan (P)
6. Déterminer le vecteur unitaire \vec{u} porté par le vecteur $(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)$
7. Calculer le produit mixte $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ et montrer qu'il est invariant par permutation circulaire.

Exercice 2

On considère dans le plan xOy deux vecteurs unitaires perpendiculaires \vec{u} et \vec{v} , tournant autour de l'axe (Oz) . Soit $R(O, x, y, z)$ un repère muni de la base O.N.D $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. En posant $(\vec{Ox}, \vec{u}) = \theta$ ($\theta = \omega t$, ω est une constante). Soit $\vec{r} = \cos bt \vec{i} + \sin bt \vec{j} + t^2 \vec{k}$ une fonction vectorielle et $\lambda(t) = e^{-at}$ une fonction scalaire (a et b sont des constantes)

1. Exprimer les vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
2. Déterminer le vecteur \vec{w} , tel que le système $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constitue une base O.N.D
3. Calculer $\left. \frac{d\vec{u}}{d\theta} \right|_R$ et $\left. \frac{d\vec{v}}{d\theta} \right|_R$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ puis dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
4. Calculer $\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R$ et $\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_R$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ puis dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.
5. Calculer $\left. \frac{d(\lambda \vec{r})}{dt} \right|_R$ et $\left. \frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt} \right|_R$ dans les bases $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 3

1. Considérons deux points A et B , définis en coordonnées cartésiennes par : $A(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2)$ et $B(0, 1, 0)$.

Donner les coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) et sphériques (r, θ, φ) de ces deux points, respectivement dans les bases $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.

2. Dans un repère orthonormé direct $\mathfrak{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un point M est repéré, à tout instant t , par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ) telles que :

$$r(t) = a \left(e^{-\frac{t}{\tau}} + 1 \right), \quad \theta(t) = \frac{\pi}{4\tau} t \quad \text{et} \quad \varphi(t) = \frac{\pi}{3}$$

(a et τ sont des constantes positives)

Tracer qualitativement la courbe (C) décrite par les positions successives du point M quand t varie de 0 à 2τ .

Exercice 4

Considérons un repère orthonormé direct $\mathfrak{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. En tout point $M(x, y, z)$ de l'espace, on définit une quantité physique f telle que : $f(x, y, z) = r^2$ avec $r = \|\vec{OM}\|$ et $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

1. Calculer le gradient du champ scalaire f , $\overrightarrow{\text{grad}f}$, et la différentielle totale de f , df .
2. Montrer qu'en tout point M , $df = \overrightarrow{\text{grad}f} d\vec{OM}$ ($d\vec{OM}$ est le vecteur déplacement élémentaire)
3. Considérons le champ scalaire f , donné en tout point de l'espace par :

$$f(M) = 3r^3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \sin(2\varphi)$$

Exprimer $\overrightarrow{\text{grad}f}$ dans les bases sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ et cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

4. Soit une fonction vectorielle $\vec{f}(x, y, z)$ définie dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par :

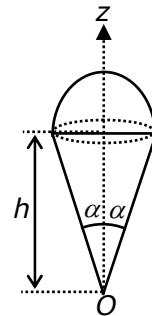
$$\vec{f}(x, y, z) = x^2 y z \vec{i} + x y^2 z \vec{j} + z \vec{k}$$

Calculer $\text{div} \vec{f}$ et $\text{rot} \vec{f}$.

Exercice 5

Un enfant achète un cornet de glace. La glace fait une demi boule (sphérique) et remplit le cornet (de forme conique) de hauteur $h = 11\text{cm}$ et d'angle $2\alpha = 30^\circ$ (figure ci-contre).

1. Calculer le volume V_b de la demi boule en fonction de h et $\tan(\alpha)$.
2. Calculer le volume V_c du cornet en fonction de h et $\tan(\alpha)$.
3. En déduire le volume total de la glace (exprimé en litre) que mangera l'enfant.



devoir à la maison

Exercice 1

Dans un repère orthonormé direct $\mathfrak{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} définis à tout instant t par : $\vec{u} = \sin(t)\vec{j} + \cos(2t)\vec{j} + t^2\vec{k}$, $\vec{v} = e^{-t}\vec{i} - 2\cos(3t)\vec{j} + \sin(3t)\vec{k}$

1. Déterminer $\frac{d\vec{u}}{dt} / \mathfrak{R}$ et $\frac{d\vec{v}}{dt} / \mathfrak{R}$ à l'instant $t = 0$.
2. Déterminer l'instant t_1 où le vecteur $\vec{w} = e^{3t}\vec{i} + \cos(3t)\vec{j} - 2\sin(3t)\vec{k}$ est perpendiculaire à \vec{v} .

Exercice 2

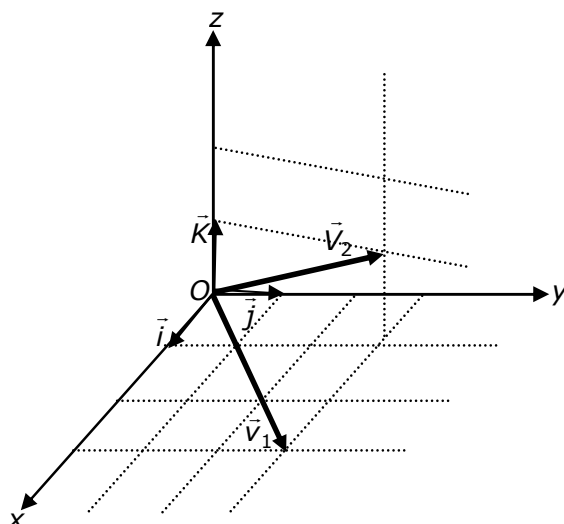
Dans le plan horizontal (xoy) d'un repère orthonormé direct $\mathfrak{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, un point M est repéré à tout instant t par ses coordonnées polaires (ρ, φ) telles que $\rho(t) = a \cos(\omega t)$ et $\varphi(t) = \omega t$ (a et ω étant des constantes positives, $\vec{OM} = \rho \vec{e}_\rho$ et $\varphi = (\vec{Ox}, \vec{OM})$)

1. Dans la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$, calculer le vecteur $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} / \mathfrak{R}$
2. Dans la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$, déterminer puis représenter les vecteurs \vec{OM} et \vec{v} à l'instant $t = \pi / (4\omega)$

Solution de série N° 1

Exercice 1

1.



2.

$$- \|\vec{v}_1\| = \sqrt{3^2 + 3^2 + 0^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \quad \|\vec{v}_2\| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$$

$$- \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = 3 \times 1 + 3 \times 3 + 0 \times 1 = 12$$

$$- \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 = (3 \times 1 - 0 \times 3)\vec{i} - (3 \times 1 - 0 \times 1)\vec{j} + (3 \times 3 - 3 \times 1)\vec{k} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

3.

$$\left(\vec{v}_1, \hat{\vec{v}}_2\right) = \arccos\left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|}\right) = \arccos\left(\frac{12}{3\sqrt{2}\sqrt{11}}\right) = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{22}}\right)$$

$$\text{Ou bien } \left(\vec{v}_1, \hat{\vec{v}}_2\right) = \arcsin\left(\frac{\|\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2\|}{\|\vec{v}_1\| \|\vec{v}_2\|}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{54}}{3\sqrt{2}\sqrt{11}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{11}}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\vec{v}_1, \hat{\vec{v}}_2\right) = 31.48^\circ$$

4.

$$\left. \begin{aligned} \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_3 &= 3 \times 1 - 3 \times 1 + 0 \times 2 = 0 \\ \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_3 &= 1 \times 1 - 3 \times 1 + 1 \times 2 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_3 \text{ et } \vec{v}_2 \perp \vec{v}_3 \Rightarrow \vec{v}_3 \perp (P)$$

5.

$$\vec{v}_4 = 2\vec{i} - \vec{k} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{i} - 3\vec{j} - \vec{k} \Rightarrow \vec{v}_4 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 \Rightarrow \vec{v}_4 \in (P)$$

6.

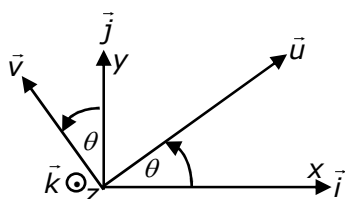
$$\vec{u} = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1 + \vec{v}_2\|} = \frac{4\vec{i} + 6\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{53}} \Rightarrow \vec{u} = \frac{4}{\sqrt{53}}\vec{i} + \frac{6}{\sqrt{53}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{53}}\vec{k}$$

7.

$$\left. \begin{aligned} (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) &= \vec{v}_1(\vec{v}_2 \wedge \vec{v}_3) = 18 \\ (\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1) &= \vec{v}_2(\vec{v}_3 \wedge \vec{v}_1) = 18 \\ (\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2) &= \vec{v}_3(\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2) = 18 \end{aligned} \right\} \Rightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3) = (\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_1) = (\vec{v}_3, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

$\Rightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est invariant par permutation circulaire.

Exercice 2



1.

$$\vec{u} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}, \quad \vec{v} = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$$

2.

Pour que le système $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constitue une base O.N.D, il faut $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = \|\vec{w}\| = 1$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}) \wedge (-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}) = \vec{k} \Rightarrow \vec{w} = \vec{k}$$

3.

$$\left. \frac{d\vec{u}}{d\theta} \right|_R = \left. \frac{d(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j})}{d\theta} \right|_R = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j} = \vec{v}$$

$$\left. \frac{d\vec{v}}{d\theta} \right|_R = \left. \frac{d(-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j})}{d\theta} \right|_R = -\cos(\theta)\vec{i} - \sin(\theta)\vec{j} = -\vec{u}$$

4.

$$\left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d(\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j})}{dt} \right|_R = -\dot{\theta}\sin(\theta)\vec{i} + \dot{\theta}\cos(\theta)\vec{j} = \dot{\theta}\vec{v} = \omega\vec{v}$$

$$\left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_R = \left. \frac{d(-\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j})}{dt} \right|_R = -\dot{\theta}\cos(\theta)\vec{i} - \dot{\theta}\sin(\theta)\vec{j} = -\dot{\theta}\vec{u} = -\omega\vec{u}$$

5.

$$\left. \frac{d(\lambda \vec{r})}{dt} \right|_R = \lambda \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_R + \vec{r} \frac{d\lambda}{dt}$$

$$\left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_R = -b \sin(bt)\vec{i} + b \cos(bt)\vec{j} + 2t\vec{k}, \quad \frac{d\lambda}{dt} = -ae^{-at}$$

$$\Rightarrow \left. \frac{d(\lambda \vec{r})}{dt} \right|_R = e^{-at} [(-b \sin(bt) - a \cos(bt))\vec{i} + (b \cos(bt) - a \sin(bt))\vec{j} + (2t - at^2)\vec{k}]$$

$$\left. \frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt} \right|_R = \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R \wedge \vec{r} + \vec{u} \wedge \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_R$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\vec{u}}{dt} \right|_R \wedge \vec{r} &= (-\omega \sin(\theta)\vec{i} + \omega \cos(\theta)\vec{j}) \wedge (\cos(bt)\vec{i} + \sin(bt)\vec{j} + t^2\vec{k}) \\ &= -\omega \sin(\theta)\sin(bt)\vec{k} + \omega \sin(\theta)t^2\vec{j} - \omega \cos(\theta)\cos(bt)\vec{k} + \omega \cos(\theta)t^2\vec{i} \\ &= \omega \cos(\theta)t^2\vec{i} + \omega \sin(\theta)t^2\vec{j} - (\omega \sin(\theta)\sin(bt) + \omega \cos(\theta)\cos(bt))\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_R &= (\cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}) \wedge (-b \sin(bt)\vec{i} + b \cos(bt)\vec{j} + 2t\vec{k}) \\ &= \cos(\theta)b \cos(bt)\vec{k} - 2t \cos(\theta)\vec{j} + \sin(\theta)b \sin(bt)\vec{k} + 2t \sin(\theta)\vec{i} \\ &= 2t \sin(\theta)\vec{i} - 2t \cos(\theta)\vec{j} + (\cos(\theta)b \cos(bt) + \sin(\theta)b \sin(bt))\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left. \frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt} \right|_R &= \omega \cos(\theta)t^2\vec{i} + \omega \sin(\theta)t^2\vec{j} - (\omega \sin(\theta)\sin(bt) + \omega \cos(\theta)\cos(bt))\vec{k} \\ &\quad + 2t \sin(\theta)\vec{i} - 2t \cos(\theta)\vec{j} + (\cos(\theta)b \cos(bt) + \sin(\theta)b \sin(bt))\vec{k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left. \frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt} \right|_R &= (\omega \cos(\theta)t^2 + 2t \sin(\theta))\vec{i} + (\omega \sin(\theta)t^2 - 2t \cos(\theta))\vec{j} \\ &\quad + (b - \omega)\cos(\theta - bt)\vec{k} \end{aligned}$$

Pour exprimer les dérivées $\left. \frac{d(\lambda \vec{r})}{dt} \right|_R$ et $\left. \frac{d(\vec{u} \wedge \vec{r})}{dt} \right|_R$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, il faut exprimer

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ en fonction de la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Exercice 3

1.

$$x = \rho \cos(\varphi) \text{ et } y = \rho \sin(\varphi)$$

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \quad y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \quad \text{et} \quad z = r \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arcsin\left(\frac{y}{\rho}\right) = \arccos\left(\frac{x}{\rho}\right), \quad r = \sqrt{\rho^2 + z^2},$$

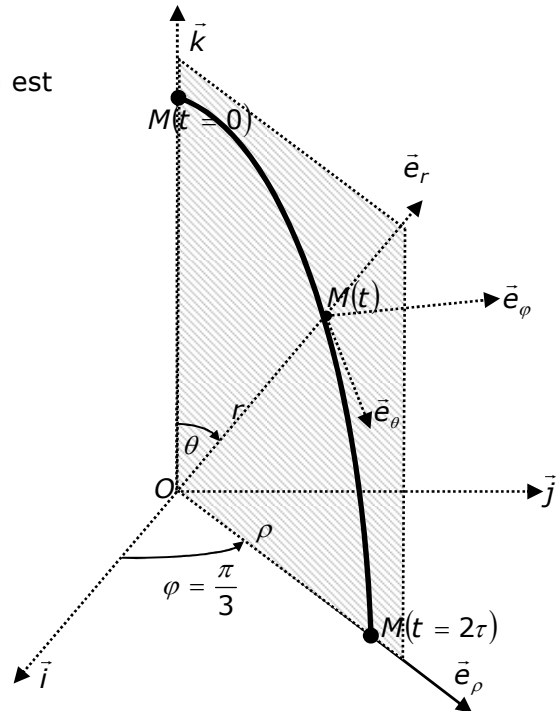
$$\theta = \arctan\left(\frac{\rho}{z}\right) = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

Coordonnées cartésiennes (x, y, z)	Coordonnées cylindriques (ρ, φ, z)	Coordonnées sphériques (r, θ, φ)
(√2, √2, 2)	(2, π/4, 2)	(2√2, π/4, π/4)
(0, 1, 0)	(1, π/2, 0)	(1, π/2, π/2)

2.

La coordonnée φ est fixe, donc la courbe (C) est dans le plan méridien.

Quand le temps t augmente de 0 à 2τ, la distance r diminue et l'angle θ augmente



Exercice 4

1. $f(x, y, z) = r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}f} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}, \quad df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}f} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} + 2z\vec{k}, \quad df = 2xdx + 2ydy + 2zdz$$

2.

$$\overrightarrow{\text{grad}f} = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}, \quad d\overrightarrow{OM} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}f} \cdot d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = df$$

3.

$$\overrightarrow{\text{grad}f} = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = 9r^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \sin(2\varphi)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = 3r^3 \sin(2\varphi) (2 \sin(\theta) \cos^2(\theta) - \sin^3(\theta))$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = 6r^3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \cos(2\varphi)$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{grad}f} &= (9r^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \sin(2\varphi)) \vec{e}_r \\ \Rightarrow &+ 3r^2 \sin(2\varphi) (2 \sin(\theta) \cos^2(\theta) - \sin^3(\theta)) \vec{e}_\theta \\ &+ 6r^2 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \cos(2\varphi) \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

En coordonnées cartésiennes, la fonction f est exprimée par :

$$f(r, \theta, \varphi) = 3r^3 \sin^2(\theta) \cos(\theta) \sin(2\varphi)$$

$$x = r \sin(\theta) \cos(\varphi), y = r \sin(\theta) \sin(\varphi) \text{ et } z = r \cos(\theta) \Rightarrow f(x, y, z) = 6xyz$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}f} = 6yz\vec{i} + 6xz\vec{j} + 6xy\vec{k}$$

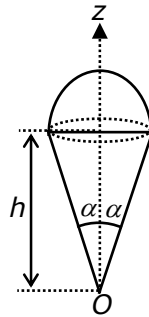
4.

$$\vec{f}(x, y, z) = x^2yz\vec{i} + xy^2z\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow f_x = x^2yz, f_y = xy^2z, f_z = z$$

$$\text{div}\vec{f} = \nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \Rightarrow \text{div}\vec{f} = 2xyz + 2xyz + 1 = 4xyz + 1$$

$$\overrightarrow{\text{rot}f} = \nabla \wedge \vec{f} = \left(\frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) \vec{i} - \left(\frac{\partial f_z}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) \vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{\text{rot}f} = -xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + (y^2z - x^2z)\vec{k}$$

Exercice 5



1.

Volume de la demi-boule, v_b :

$dv = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$: élément de volume en coordonnées sphériques.

$$0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow v_b = \int dv = \int_0^R r^2 dr \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{R^3}{3} \cdot 1 \cdot 2\pi = \frac{2\pi R^3}{3}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{R}{h} \Rightarrow v_b = \frac{2\pi h^3}{3} \tan^3(\alpha)$$

2.

Volume du cornet, v_c :

$dv = r dr d\varphi dz$: élément de volume en coordonnées cylindriques.

$$0 \leq r \leq r', 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h$$

$$\tan(\alpha) = \frac{r'}{z} = \frac{R}{h} \rightarrow r' = \frac{R}{h} z$$

$$\Rightarrow v_c = \int dv = \int_0^h \int_0^{\frac{R}{h}z} \int_0^{2\pi} r dr d\varphi dz = \int_0^h \left(\int_0^{\frac{R}{h}z} r dr \right) dz \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \int_0^h \frac{R^2}{2h^2} z^2 dz = \frac{\pi R^2}{h^2} \int_0^h z^2 dz = \frac{\pi R^2}{h^2} \frac{h^3}{3}$$

$$\Rightarrow v_c = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

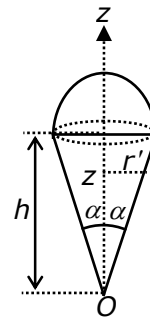
$$\tan(\alpha) = \frac{R}{h} \Rightarrow v_c = \frac{\pi h^3}{3} \tan^2(\alpha)$$

3.

Quantité de glace exprimée en litre :

$$V_T = v_b + v_c = \frac{2\pi h^3}{3} \tan^3(\alpha) + \frac{\pi h^3}{3} \tan^2(\alpha) = \frac{\pi h^3}{3} (2 \tan^3(\alpha) + \tan^2(\alpha))$$

$$h = 11\text{cm}, \alpha = 15^\circ \Rightarrow V_T = 153.7\text{cm}^3 \Rightarrow V_T = 0.1537\text{litres}$$



Série N° 2
Cinématique du Point Matériel et changement de référentiel

Exercice 1

Les coordonnées d'un point matériel M dans un repère orthonormé direct $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont données en fonction du temps par : $x(t) = t-1$, $y(t) = -t^2+1$ et $z(t) = 0$.

1. Déterminer l'équation de la trajectoire de M .
2. Déterminer les vecteurs vitesse et accélération de M .
3. Calculer les accélérations tangentielle et normale de M .
4. Déduire le rayon de courbure R_c de la trajectoire en fonction du temps.

Exercice 2

On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cylindriques sont, à chaque instant: $\rho(t) = a_0 t^2 + \rho_0$, $\varphi(t) = \omega t - \varphi_0$ et $z(t) = -vt$, avec $\rho_0 = 1\text{m}$, $a_0 = 1\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$, $\omega = 3\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$, $\varphi_0 = 2\text{rad}$ et $v = 2\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$.

1. Exprimer dans la base cylindrique $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$, les vecteurs vitesse et accélération de M .
2. Calculer la norme du vecteur vitesse de M à l'instant $t = 1$ s.
3. Calculer la norme du vecteur accélération de M à l'instant initial ($t = 0$ s).

Exercice 3

L'abscisse curviligne d'un point matériel M décrivant un cercle de rayon R est $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt$, a et b étant des constantes.

1. Exprimer, dans la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$, les accélérations tangentielle et normale de M .
2. Déduire le module de l'accélération de M .

Exercice 4

On considère un point M en mouvement dans le plan xOy . M est repéré par ses coordonnées polaires suivantes : $\rho = \frac{\rho_0}{2}(1 + \cos \varphi)$; $\varphi = \omega t$ où ρ_0 et ω sont des constantes positives.

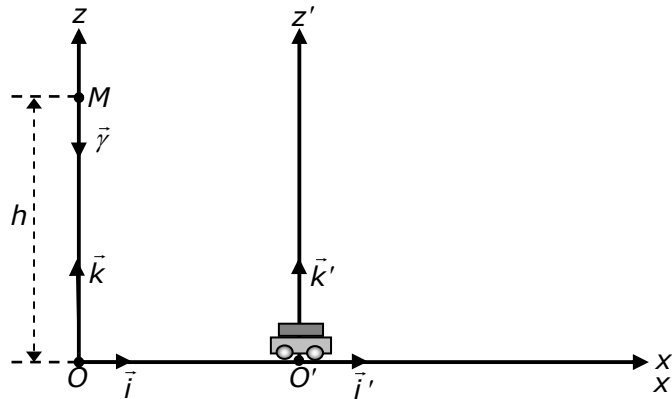
1. Quelle est l'allure de la trajectoire de M .
2. Exprimer, en fonction de l'angle φ , l'abscisse curviligne s de M , comptée à partir du point A qui correspond à $\varphi = 0$. Pour quel angle polaire a-t-on $s = \rho_0$? On désignera par B la position correspondante de M .
3. En déduire le périmètre de la trajectoire.
4. Exprimer dans la base polaire $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$, les vecteurs vitesse et accélération de M .
5. En déduire, les modules de la vitesse et de l'accélération de M en fonction de ρ .
6. Déterminer le rayon de courbure R_c de la trajectoire.
7. Déterminer les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$.
8. Calculer les accélérations tangentielle et normale de M .
9. Application numérique : $\rho_0 = 50\text{cm}$, $\omega = 3.2\text{rad/s}$. Calculer la vitesse, l'accélération et le rayon de courbure en A et B .

Exercice 5

On laisse tomber d'un immeuble de hauteur h une bille M sans vitesse initiale. Dans un référentiel $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié à cet immeuble, la chute de celle-ci s'effectue verticalement selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\vec{\gamma} = -g\vec{k}$ (voir la figure ci-dessous).

1. Déterminer le vecteur position $\vec{O'M}$ de la bille dans un référentiel $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{u} = u\vec{i}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher. Déduire l'équation de la trajectoire de la bille dans $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$.

2. Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$ de la bille dans le même référentiel $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la verticale de chute un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{\gamma} = a\vec{i}'$. Déduire l'équation de la trajectoire de la bille dans $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$.



devoir à la maison

Exercice 1

Une particule M se déplace sur l'axe Ox , de vecteur unitaire \vec{i} , avec une accélération négative, proportionnelle à la vitesse à chaque instant: $\vec{\gamma} = -k v\vec{i}$ (k est une constante positive). A l'instant $t = 0$, elle passe en O avec une vitesse $v_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$.

1. Déterminer la loi $v(x)$ (la vitesse au point x).
2. A quelle vitesse et à quel instant la particule passera-t-elle à 150 m de l'origine O , si le module de l'accélération à l'instant 0 vaut 2 m s^{-2} ?

Exercice n2

Un nageur plonge d'un point A situé sur une rive d'un fleuve de largeur ℓ et veut atteindre l'autre rive en un point B situé juste en face de A . Pour cela, il nage suivant une direction faisant un angle α avec (AB) . Sa vitesse par rapport à l'eau est v et la vitesse du courant est u .

1. Sur un schéma, représenter vectoriellement les vitesses et déterminer l'angle α en fonction de v et u .
2. Exprimer, en fonction de ℓ , u et v , le temps nécessaire t (temps de traversée) pour que le nageur traversera la fleuve.
3. Que devient ce temps si le point B n'est pas situé en face de A .

Solution de série N° 2
Cinématique du Point Matériel et changement de référentiel

Exercice 1

1.

$x(t) + 1 = t \Rightarrow y, z = -x^2 - 2x$ (équation de la trajectoire) \Rightarrow la trajectoire est une parabole.

2.

$$\vec{v}(M/\mathfrak{R}) = \frac{d\vec{OM}}{dt/\mathfrak{R}} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = \vec{i} - 2t\vec{j}$$

$$\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) = \frac{d\vec{v}(M/\mathfrak{R})}{dt/\mathfrak{R}} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2/\mathfrak{R}} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} = -2\vec{j}$$

3.

Accélération tangentielle : $\vec{\gamma}_t = \frac{d\|\vec{v}(M/\mathfrak{R})\|}{dt} \vec{\tau}$

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{v}(M/\mathfrak{R})}{\|\vec{v}(M/\mathfrak{R})\|} = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \vec{i} - \frac{2t}{\sqrt{1+4t^2}} \vec{j}, \quad \frac{d\|\vec{v}(M/\mathfrak{R})\|}{dt} = \frac{d(\sqrt{1+4t^2})}{dt} = \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_t = \frac{4t}{1+4t^2} \vec{i} - \frac{8t^2}{1+4t^2} \vec{j}$$

Accélération normale : $\vec{\gamma}_n = \vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) - \vec{\gamma}_t$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_n = -\frac{4t}{1+4t^2} \vec{i} - \frac{2}{1+4t^2} \vec{j}$$

4.

Rayon de courbure : $R_c = \frac{\|\vec{v}(M/\mathfrak{R})\|^3}{\|\vec{v}(M/\mathfrak{R}) \wedge \vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})\|} = \frac{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$

$$\Rightarrow R_c = \frac{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

Ou bien

$$\vec{\gamma}_n = \frac{\|\vec{v}(M/\mathfrak{R})\|^2}{R_c} \vec{n} \Rightarrow \|\vec{\gamma}_n\| = \frac{\|\vec{v}(M/\mathfrak{R})\|^2}{R_c} \|\vec{n}\|, \quad \|\vec{n}\| = 1$$

$$\Rightarrow R_c = \frac{\|\vec{v}(M/\mathfrak{R})\|^2}{\|\vec{\gamma}_n\|} = \frac{(1+4t^2)}{\sqrt{\left(\frac{4t}{1+4t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{1+4t^2}\right)^2}} = \frac{(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}}{2}$$

Exercice 2

1.

$$\vec{v}(M/\mathfrak{R}) = \frac{d\vec{OM}}{dt/\mathfrak{R}} = \frac{d(\rho\vec{e}_\rho + z\vec{k})}{dt/\mathfrak{R}} = \frac{d\rho}{dt} \vec{e}_\rho + \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\mathfrak{R}} + \frac{dz}{dt} \vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M/\mathfrak{R}) = 2a_0t\vec{e}_\rho + (a_0t^2 + \rho_0)\omega\vec{e}_\varphi - v\vec{k}$$

$$\Rightarrow \|\vec{v}(M/\mathfrak{R})\| = \sqrt{(2a_0t)^2 + ((a_0t^2 + \rho_0)\omega)^2 + v^2}$$

$$\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) = \frac{d\vec{v}(M/\mathfrak{R})}{dt/\mathfrak{R}} = 2a_0\vec{e}_\rho + 2a_0\omega t\vec{e}_\varphi + 2a_0\omega\vec{e}_\varphi - (a_0t^2 + \rho_0)\omega^2\vec{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) = [2a_0 - (a_0t^2 + \rho_0)\omega^2] \vec{e}_\rho + 4a_0\omega t\vec{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \|\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})\| = \sqrt{[2a_0 - (a_0t^2 + \rho_0)\omega^2]^2 + (4a_0\omega t)^2}$$

2.

Norme du vecteur vitesse de M à l'instant $t = 1$ s.

$$\|\vec{v}(M / \mathfrak{R})\| = \sqrt{(2a_0)^2 + ((a_0 + \rho_0)\omega)^2 + v^2} = 6.63m / s$$

3.

Norme du vecteur accélération de M à l'instant initial ($t = 0$ s).

$$\|\vec{\gamma}(M / \mathfrak{R})\| = \sqrt{(2a_0 - \rho_0\omega^2)^2} = 7ms^{-2}$$

Exercice 3

1.

Accélérations tangentielle : $\vec{\gamma}_t = \frac{d\|\vec{v}(M / \mathfrak{R})\|}{dt} \vec{\tau} = \ddot{s} \vec{\tau}$

$$\ddot{s} = \frac{d^2s}{dt^2} = a \Rightarrow \vec{\gamma}_t = a \vec{\tau}$$

Accélération normale : $\vec{\gamma}_n = \frac{\|\vec{v}(M / \mathfrak{R})\|^2}{R_c} \vec{n}$

Le point M décrit un cercle de rayon $R \Rightarrow$ Le rayon de courbure est $R_c = R$

$$\begin{aligned} \vec{v}(M / \mathfrak{R}) = \dot{s} \vec{\tau} \Rightarrow \vec{\gamma}_n &= \frac{\|\dot{s}\|^2}{R} \vec{n} = \frac{(at + b)^2}{R} \vec{n} \\ \Rightarrow \vec{\gamma}_n &= \frac{(at + b)^2}{R} \vec{n} \end{aligned}$$

2.

Module de l'accélération de M :

$\vec{\gamma}(M / \mathfrak{R}) = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$ (\mathfrak{R} est le référentiel dans lequel M décrit le cercle)

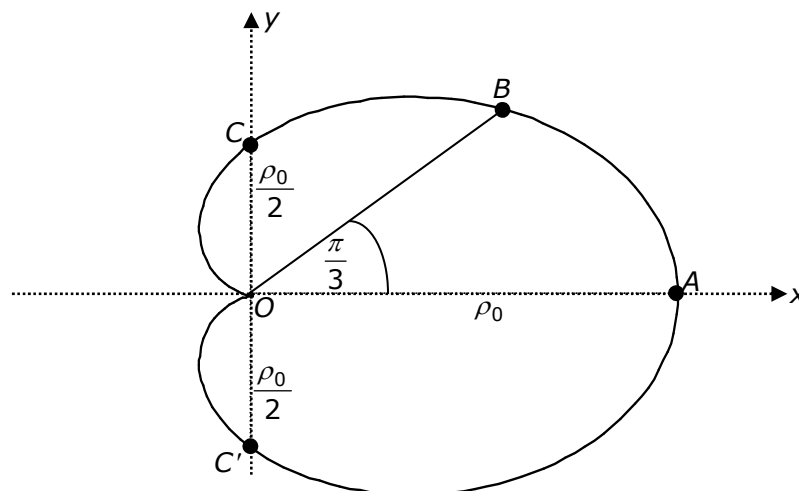
$$\Rightarrow \|\vec{\gamma}(M / \mathfrak{R})\|^2 = \|\vec{\gamma}_t\|^2 + \|\vec{\gamma}_n\|^2$$

$$\Rightarrow \|\vec{\gamma}(M / \mathfrak{R})\|^2 = a^2 + \frac{(at + b)^4}{R^2}$$

$$\Rightarrow \|\vec{\gamma}(M / \mathfrak{R})\| = \left(a^2 + \frac{(at + b)^4}{R^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

Exercice 4

1.



La trajectoire de M est une cardioïde. Elle admet l'axe (Ox) comme un axe de symétrie. Elle coupe cet axe en $O(\rho = 0, \varphi = \pi)$ et en $A(\rho = \rho_0, \varphi = 0)$. Elle rencontre l'axe (Oy) en

$$C\left(\rho = \frac{\rho_0}{2}, \varphi = \frac{\pi}{2}\right) \text{ et en } C'\left(\rho = \frac{\rho_0}{2}, \varphi = -\frac{\pi}{2}\right).$$

2.

En coordonnées polaires : $d\vec{OM} = d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi$

En coordonnées curvilignes : $d\vec{OM} = ds\vec{\tau}$

$$\Rightarrow (ds)^2 = (d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 \Rightarrow ds = \sqrt{(d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2}$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{2}(1 + \cos(\varphi)) \Rightarrow d\rho = -\frac{\rho_0}{2}\sin(\varphi)d\varphi \Rightarrow ds = \sqrt{\left(-\frac{\rho_0}{2}\sin(\varphi)d\varphi\right)^2 + \left(\frac{\rho_0}{2}(1 + \cos(\varphi))d\varphi\right)^2}$$

$$\Rightarrow ds = \frac{\rho_0}{2}d\varphi\sqrt{2(1 + \cos(\varphi))} \Rightarrow ds = \rho_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi \Rightarrow s = \int \rho_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi$$

$$\Rightarrow s = 2\rho_0 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + s_0$$

L'abscisse curviligne s de M est comptée à partir du point A , c-à-d $s = 0$ en A .

$$\Rightarrow s = 0 \text{ si } \varphi = 0 \Rightarrow s(\varphi = 0) = 2\rho_0 \sin(0) + s_0 = 0 \Rightarrow s_0 = 0$$

$$\Rightarrow s = 2\rho_0 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\text{Si } s = \rho_0 \Rightarrow \rho_0 = 2\rho_0 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\rho_0}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{3}{4}\rho_0 \Rightarrow B\left(\frac{3}{4}\rho_0, \frac{\pi}{3}\right)$$

3.

Le demi périmètre (demi longueur de la trajectoire) est la longueur de l'arc AO .

$$\frac{1}{2}P = \int_A^O ds = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \rho_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi = 2\rho_0 \left[\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right]_0^\pi = 2\rho_0$$

$$\Rightarrow \text{le périmètre de la trajectoire est } P = 4\rho_0$$

4.

$$\vec{v}(M/\mathfrak{R}) = \frac{d\vec{OM}}{dt/\mathfrak{R}} = \frac{d(\rho\vec{e}_\rho)}{dt/\mathfrak{R}} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{dt/\mathfrak{R}} = -\frac{\rho_0}{2}\omega \sin(\varphi)\vec{e}_\rho + \frac{\rho_0}{2}(1 + \cos(\varphi))\omega\vec{e}_\varphi$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) &= \frac{d\vec{v}(M/\mathfrak{R})}{dt/\mathfrak{R}} = -\frac{\rho_0}{2}\omega^2 \cos(\varphi)\vec{e}_\rho - \frac{\rho_0}{2}\omega^2 \sin(\varphi)\vec{e}_\varphi - \frac{\rho_0}{2}\sin(\varphi)\omega^2\vec{e}_\varphi - \frac{\rho_0}{2}(1 + \cos(\varphi))\omega^2\vec{e}_\rho \\ &= -\left(\rho_0 \cos(\varphi) + \frac{\rho_0}{2}\right)\omega^2\vec{e}_\rho - \rho_0\omega^2 \sin(\varphi)\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

5.

$$\|\vec{v}(M/\mathfrak{R})\| = \sqrt{\left(\frac{\rho_0}{2}\omega \sin(\varphi)\right)^2 + \left(\frac{\rho_0}{2}(1 + \cos(\varphi))\omega\right)^2} = \rho_0\omega \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\|\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})\| = \sqrt{\left(\left(\rho_0 \cos(\varphi) + \frac{\rho_0}{2}\right)\omega^2\right)^2 + (\rho_0\omega^2 \sin(\varphi))^2} = \frac{\rho_0}{2}\omega^2 \sqrt{1 + 8 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}$$

On exprime $\|\vec{v}(M/\mathfrak{R})\|$ et $\|\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})\|$ en fonction de ρ :

$$\rho = \frac{\rho_0}{2}(1 + \cos(\varphi)) \Rightarrow \rho = \rho_0 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$$

$$\Rightarrow \|\vec{v}(M/\mathfrak{R})\| = \omega\sqrt{\rho_0\rho}, \quad \|\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})\| = \frac{\omega^2}{2}\sqrt{\rho_0^2 + 8\rho_0\rho}$$

6.

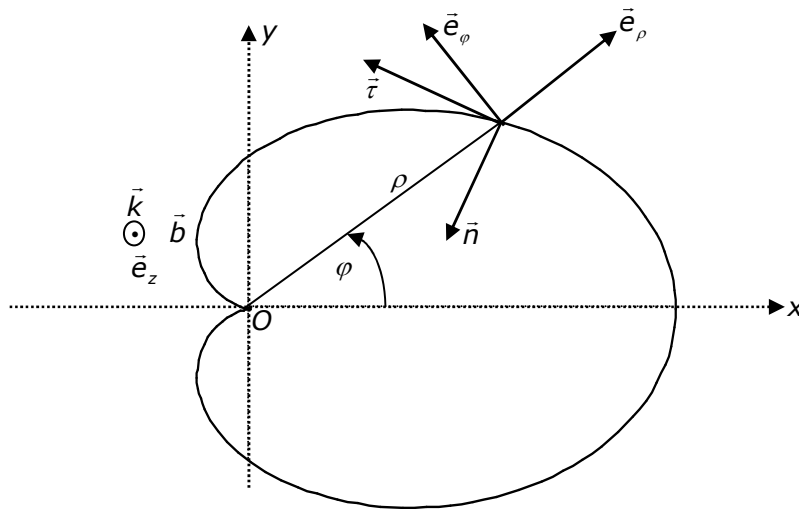
$$\text{Rayon de courbure } R_c \text{ de la trajectoire : } R_c = \frac{\|\vec{v}(M/\mathfrak{R})\|^3}{\|\vec{v}(M/\mathfrak{R}) \wedge \vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})\|}$$

$$\begin{aligned}
\vec{v}(M/\mathfrak{R}) \wedge \vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) &= \frac{\rho_0^2 \omega^3}{2} \sin^2(\varphi) \vec{e}_z + \frac{\rho_0 \omega}{2} (1 + \cos(\varphi)) \left(\rho_0 \omega^2 \cos(\varphi) + \frac{\rho_0 \omega^2}{2} \right) \vec{e}_z \\
&= \frac{3}{2} \rho_0^2 \omega^3 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_z \\
\Rightarrow \|\vec{v}(M/\mathfrak{R}) \wedge \vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})\| &= \frac{3}{2} \rho_0^2 \omega^3 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \\
R_c &= \frac{\left(\rho_0 \omega \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^3}{\frac{3}{2} \rho_0^2 \omega^3 \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \Rightarrow R_c = \frac{2}{3} \rho_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)
\end{aligned}$$

7.

Les vecteurs de la base de Frenet $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$:

- $\vec{\tau} = \frac{\vec{v}(M/\mathfrak{R})}{\|\vec{v}(M/\mathfrak{R})\|} = -\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_\rho + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_\varphi$
- le mouvement de M se fait dans le plan $(xoy) \Rightarrow \vec{\tau}$ et $\vec{n} \in (xoy)$.
 $\Rightarrow \vec{k} \perp \vec{\tau}$ et $\vec{k} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{b} = \vec{k}$
- $\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau} = \vec{k} \wedge \vec{\tau} \Rightarrow \vec{n} = -\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_\rho - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_\varphi$



A chaque instant t , le point M appartient à un cercle de rayon $R_c = R_c(\varphi)$ et de centre C tel que $\vec{MC} = R_c \vec{n}$

8.

Accélérations tangentielle : $\vec{\gamma}_t = \frac{d\|\vec{v}(M/\mathfrak{R})\|}{dt} \vec{\tau} = \dot{s} \vec{\tau}$

$$s = 2\rho_0 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow \ddot{s} = \frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{\rho_0 \omega^2}{2} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow \vec{\gamma}_t = -\frac{\rho_0 \omega^2}{2} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{\tau}$$

Accélération normale : $\vec{\gamma}_n = \frac{\|\vec{v}(M/\mathfrak{R})\|^2}{R_c} \vec{n} = \frac{\dot{s}^2}{R_c} \vec{n}$

$$\dot{s} = \rho_0 \omega \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \Rightarrow \vec{\gamma}_n = \frac{\left(\rho_0 \omega \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)\right)^2}{\frac{2}{3} \rho_0 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \vec{n} \Rightarrow \vec{\gamma}_n = \frac{3}{2} \rho_0 \omega^2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{n}$$

On vérifie que $\vec{\gamma}(M / \mathfrak{R}) = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n$?

$$\vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n = -\frac{\rho_0 \omega^2}{2} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_r + \frac{3}{2} \rho_0 \omega^2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{n}$$

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n &= -\frac{\rho_0 \omega^2}{2} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left(-\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_\rho + \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_\varphi\right) + \frac{3}{2} \rho_0 \omega^2 \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \left(-\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_\rho - \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \vec{e}_\varphi\right) \\ &= -\left(\rho_0 \cos(\varphi) + \frac{\rho_0}{2}\right) \omega^2 \vec{e}_\rho - \rho_0 \omega^2 \sin(\varphi) \vec{e}_\varphi \\ &\Rightarrow \vec{\gamma}(M / \mathfrak{R}) = \vec{\gamma}_t + \vec{\gamma}_n \end{aligned}$$

9.

Application numérique ($\rho_0=50\text{cm}$, $\omega=3.2\text{rad/s}$) :

- En A :

$$\|\vec{v}(M / \mathfrak{R})\| = \rho_0 \omega = 1.6 \text{ m/s}$$

$$\|\vec{\gamma}(M / \mathfrak{R})\| = \frac{3}{2} \rho_0 \omega^2 = 7.5 \text{ m/s}^2$$

$$R_c = \frac{2}{3} \rho_0 = 0.33 \text{ m}$$

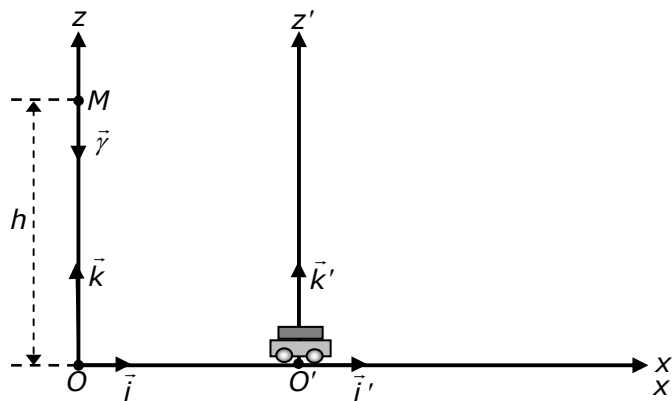
- En B :

$$\|\vec{v}(M / \mathfrak{R})\| = \frac{\sqrt{3}}{2} \rho_0 \omega = 1.38 \text{ m/s}$$

$$\|\vec{\gamma}(M / \mathfrak{R})\| = \frac{\sqrt{7}}{2} \rho_0 \omega^2 = 6.6 \text{ m/s}^2$$

$$R_c = \frac{\sqrt{3}}{3} \rho_0 = 0.29 \text{ m}$$

Exercice 5



Le vecteur position de la bille dans le référentiel $\mathfrak{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est :

$$\vec{OM} = z \vec{k} \quad (x = y = 0)$$

La bille est en chute libre sans vitesse initiale dans $\mathfrak{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec une accélération $\vec{\gamma} = -g \vec{k}$

$$\Rightarrow \gamma_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = -g \Rightarrow z = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 t + z_0$$

$$\text{A } t = 0, v_0 = 0, z_0 = h \Rightarrow z = -\frac{1}{2} g t^2 + h \Rightarrow \vec{OM} = \left(-\frac{1}{2} g t^2 + h\right) \vec{k}$$

Le vecteur position de la bille dans le référentiel $\mathfrak{R}'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est :

$$\vec{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'$$

$\vec{i} = \vec{i}'$, $\vec{k} = \vec{k}'$ et $y' = 0$ (le mouvement de M se fait dans le plan (xoz)) $\Rightarrow \vec{O'M} = x'\vec{i}' + z'\vec{k}'$

$$\vec{OM} = \vec{OO'} + \vec{O'M} \Rightarrow \vec{O'M} = \vec{OM} - \vec{OO'}$$

1.

1^{er} cas : $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est en mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{u} = u\vec{i}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher :

Le point O' est fixe dans $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ $\Rightarrow \vec{v}(O' / \mathfrak{R}) = \frac{d\vec{OO'}}{dt / \mathfrak{R}} = u\vec{i} = \frac{dx_{O'}}{dt} \vec{i}$

$$\Rightarrow x_{O'} = ut + C$$

A $t = 0 \rightarrow O \equiv O' \rightarrow x_{O'} = 0 \rightarrow C = 0 \Rightarrow x_{O'} = ut \Rightarrow \vec{OO'} = ut\vec{i}$

$$\Rightarrow \vec{O'M} = x'\vec{i}' + z'\vec{k}' = \vec{OM} - \vec{OO'} = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + h\right)\vec{k}' - ut\vec{i}'$$

$$\Rightarrow x' = -ut \text{ et } z' = -\frac{1}{2}gt^2 + h \Rightarrow z' = -\frac{1}{2}g \frac{x'^2}{u^2} + h$$

\Rightarrow la trajectoire de la bille dans $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est une parabole.

2.

2^{ème} cas : $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est en mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\vec{\gamma} = a\vec{i}$ et passant à la verticale de chute au moment du lâcher :

Le point O' est fixe dans $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ $\Rightarrow \vec{\gamma}(O' / \mathfrak{R}) = \frac{d^2\vec{OO'}}{dt^2 / \mathfrak{R}} = a\vec{i} = \frac{d^2x_{O'}}{dt^2} \vec{i}$

$$\Rightarrow x_{O'} = \frac{1}{2}at^2 + C_1t + C_2$$

A $t = 0 \rightarrow O \equiv O' \rightarrow x_{O'} = 0$, $\dot{x}_{O'} = 0 \rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow x_{O'} = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \vec{OO'} = \frac{1}{2}at^2\vec{i}$

$$\Rightarrow \vec{O'M} = x'\vec{i}' + z'\vec{k}' = \vec{OM} - \vec{OO'} = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + h\right)\vec{k}' - \frac{1}{2}at^2\vec{i}'$$

$$\Rightarrow x' = -\frac{1}{2}at^2 \text{ et } z' = -\frac{1}{2}gt^2 + h \Rightarrow z' = \frac{g}{a}x' + h$$

\Rightarrow la trajectoire de la bille dans $R'(O', \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ est une droite d'équation $z' = \frac{g}{a}x' + h$.

Série N° 3
Dynamique du Point Matériel

Exercice 1 :

On considère le repère $\mathfrak{R}(Oxyz)$ (repère absolu), (xOy) étant le plan horizontal. Soit (P) un plan vertical qui tourne autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω . Dans ce plan (P) , un anneau M assimilé à un point matériel de masse m se meut sans frottement, dans le champ de pesanteur, sur un cerceau (C) de centre O_1 et de rayon r . La position de O_1 est définie par les paramètres a et b (a et b sont des constantes), celle de M est définie par l'angle $\theta(t)$ (voir figure 1). On désigne par $\mathfrak{R}_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ un repère lié au plan (P) (repère relatif) tel que le plan $(x_1O_1z_1)$ reste constamment dans le plan (P) et $\vec{k}_1 = \vec{k}$. On suppose que $\theta = \dot{\theta} = 0$ à $t=0$.

1. Exprimer dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$:

- a. le vecteur rotation de R_1 par rapport à \mathfrak{R} : $\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R})$;
- b. les vitesses relative, d'entraînement et absolue du point M ;
- c. les accélérations relative, d'entraînement, de Coriolis et absolue du point M ;
- d. le poids de M et les forces d'inertie.

2. En appliquant le théorème de la quantité du mouvement dans le repère \mathfrak{R}_1 , déterminer l'équation différentielle du mouvement de M vérifiée par θ et les composantes de la réaction \vec{R} dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. En déduire une relation entre θ et $\dot{\theta}$.

3. que deviennent ces résultats si le plan (P) est fixe.

Exercice 2 :

1. On considère un camion immobile à benne baissée. On pose sur la benne une brique de masse $m = 3$ kg. Le camion soulève sa benne progressivement. Les coefficients de frottement statique et dynamique entre la benne et la brique sont respectivement $k_s = 0.6$ et $k_d = 0.3$.

- a. Calculer l'angle α_0 d'inclinaison de la benne par rapport à l'horizontale pour provoquer le glissement de la brique.
- b. Si $\alpha = 45^\circ$, déterminer l'accélération de la brique. On donne $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

2. Le camion roule maintenant en ligne droite avec une vitesse constante v_c . Une boîte, considérée comme ponctuelle, glisse sur sa benne avec une vitesse $v_b = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$ (voir figure 2).

- a. Déterminer la vitesse du camion pour qu'un observateur au sol puisse voir la boîte tomber verticalement. En déduire la vitesse de la boîte par rapport au sol.
- b. Que devient la vitesse de la boîte par rapport au sol si la vitesse du camion est $v_c = 0.5 \text{ m.s}^{-1}$. Faire le schéma de composition des vitesses.

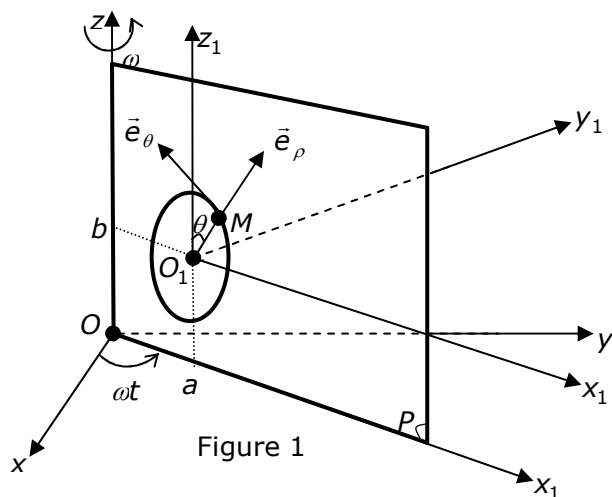


Figure 1

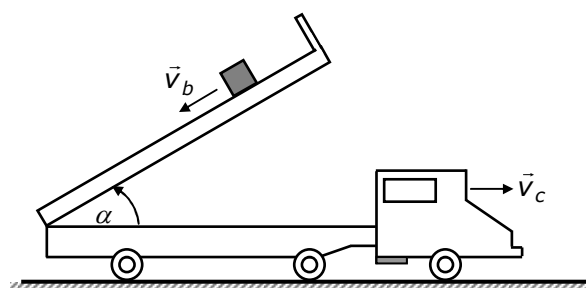
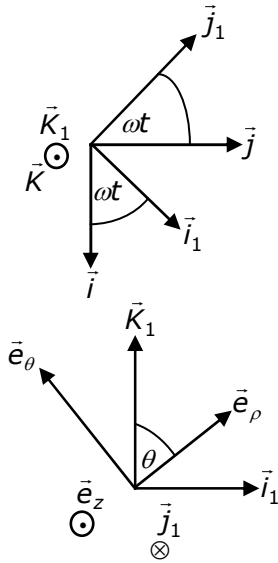


Figure 2

Solution de série N° 3
Dynamique du Point Matériel

Exercice 1 :



$$\vec{i}_1 = \cos(\omega t)\vec{j} + \sin(\omega t)\vec{j}, \vec{j}_1 = -\sin(\omega t)\vec{j} + \cos(\omega t)\vec{j}, \vec{k}_1 = \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt / \mathfrak{R}} = \omega\vec{j}_1, \frac{d\vec{j}_1}{dt / \mathfrak{R}} = -\omega\vec{i}_1, \frac{d\vec{k}_1}{dt / \mathfrak{R}} = \vec{0}$$

$$\vec{e}_\rho = \sin(\theta)\vec{i}_1 + \cos(\theta)\vec{k}_1, \vec{e}_\theta = -\cos(\theta)\vec{i}_1 + \sin(\theta)\vec{k}_1, \vec{e}_z = -\vec{j}_1$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt / \mathfrak{R}_1} = -\dot{\theta}\vec{e}_\theta, \frac{d\vec{e}_\theta}{dt / \mathfrak{R}_1} = \dot{\theta}\vec{e}_\rho, \frac{d\vec{e}_z}{dt / \mathfrak{R}_1} = \vec{0}$$

$$\vec{OM} = \vec{OO}_1 + \vec{O}_1\vec{M}, \vec{OO}_1 = a\vec{i}_1 + b\vec{k}_1, \vec{O}_1\vec{M} = r\vec{e}_\rho \quad (r, a, b \text{ sont des constantes})$$

1.

On exprime dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$:

a. le vecteur rotation de R_1 par rapport à R : $\vec{\Omega}(R_1 / R)$:

$$\frac{d\vec{i}_1}{dt / \mathfrak{R}} = \omega\vec{j}_1 = \omega\vec{k}_1 \wedge \vec{i}_1, \frac{d\vec{j}_1}{dt / \mathfrak{R}} = -\omega\vec{i}_1 = \omega\vec{k}_1 \wedge \vec{j}_1, \frac{d\vec{k}_1}{dt / \mathfrak{R}} = \vec{0} = \omega\vec{k}_1 \wedge \vec{k}_1$$

$$\Rightarrow \vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) = \omega\vec{k}_1$$

b. les vitesses relative, d'entraînement et absolue du point M :

$$- \vec{v}_r(M) = \vec{v}(M / \mathfrak{R}_1) = \frac{d\vec{O}_1\vec{M}}{dt / \mathfrak{R}_1} = \frac{d(r\vec{e}_\rho)}{dt / \mathfrak{R}_1} = r \frac{d\vec{e}_\rho}{dt / \mathfrak{R}_1} = -r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{v}_r(M) = r\dot{\theta} \cos(\theta)\vec{i}_1 - r\dot{\theta} \sin(\theta)\vec{k}_1 : \text{vitesse relative}$$

$$- \vec{v}_e(M) = \vec{v}(O_1 / \mathfrak{R}) + \vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge \vec{O}_1\vec{M}$$

$$\vec{v}(O_1 / \mathfrak{R}) = \frac{d\vec{OO}_1}{dt / \mathfrak{R}} = \frac{d(a\vec{i}_1 + b\vec{k}_1)}{dt / \mathfrak{R}} = a \frac{d\vec{i}_1}{dt / \mathfrak{R}} + b \frac{d\vec{k}_1}{dt / \mathfrak{R}} = a\omega\vec{j}_1$$

$$\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge \vec{O}_1\vec{M} = \omega\vec{k}_1 \wedge r\vec{e}_\rho = \omega\vec{k}_1 \wedge r(\sin(\theta)\vec{i}_1 + \cos(\theta)\vec{k}_1) = r\omega \sin(\theta)\vec{j}_1$$

$$\Rightarrow \vec{v}_e(M) = (a\omega + r\omega \sin(\theta))\vec{j}_1 : \text{vitesse d'entraînement}$$

$$- \vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M) = r\dot{\theta} \cos(\theta)\vec{i}_1 - r\dot{\theta} \sin(\theta)\vec{k}_1 + (a\omega + r\omega \sin(\theta))\vec{j}_1$$

$$\Rightarrow \vec{v}_a(M) = r\dot{\theta} \cos(\theta)\vec{i}_1 + (a\omega + r\omega \sin(\theta))\vec{j}_1 - r\dot{\theta} \sin(\theta)\vec{k}_1 : \text{vitesse absolue}$$

c. les accélérations relative, d'entraînement, de Coriolis et absolue du point M :

$$- \vec{\gamma}_r(M) = \vec{\gamma}(M / \mathfrak{R}_1) = \frac{d\vec{v}(M / \mathfrak{R}_1)}{dt / \mathfrak{R}_1} = \frac{d(-r\dot{\theta}\vec{e}_\theta)}{dt / \mathfrak{R}_1} = -r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt / \mathfrak{R}_1} = -r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho$$

$$\vec{\gamma}_r(M) = (r\ddot{\theta} \cos(\theta) - r\dot{\theta}^2 \sin(\theta))\vec{i}_1 - (r\ddot{\theta} \sin(\theta) + r\dot{\theta}^2 \cos(\theta))\vec{k}_1 : \text{accélération relative}$$

$$- \vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1 / \mathfrak{R}) + \frac{d\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R})}{dt / \mathfrak{R}} \wedge \vec{O}_1\vec{M} + \vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge \vec{O}_1\vec{M})$$

$$\vec{\gamma}(O_1 / \mathfrak{R}) = \frac{d\vec{v}(O_1 / \mathfrak{R})}{dt / \mathfrak{R}} = \frac{d(a\omega\vec{j}_1)}{dt / \mathfrak{R}} = -a\omega^2\vec{i}_1$$

$$\frac{d\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R})}{dt / \mathfrak{R}} \wedge \overrightarrow{O_1 M} = \vec{0} \wedge \overrightarrow{O_1 M} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge \left(\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge \overrightarrow{O_1 M} \right) = \omega \vec{k}_1 \wedge r \omega \sin(\theta) \vec{j}_1 = -r \omega^2 \sin(\theta) \vec{i}_1$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_e(M) = (-a\omega^2 - r\omega^2 \sin(\theta)) \vec{i}_1 : \text{accélération d'entraînement}$$

$$- \vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge \vec{v}_r(M) = 2\omega \vec{k}_1 \wedge (r\dot{\theta} \cos(\theta) \vec{i}_1 - r\dot{\theta} \sin(\theta) \vec{k}_1) = 2r\omega\dot{\theta} \cos(\theta) \vec{j}_1$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_c(M) = 2r\omega\dot{\theta} \cos(\theta) \vec{j}_1 : \text{accélération de Coriolis}$$

$$- \vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M)$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_a(M) = (r\ddot{\theta} \cos(\theta) - r\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - a\omega^2 - r\omega^2 \sin(\theta)) \vec{i}_1$$

$$+ 2r\omega\dot{\theta} \cos(\theta) \vec{j}_1 \quad : \text{accélération absolue}$$

$$- (r\ddot{\theta} \sin(\theta) + r\dot{\theta}^2 \cos(\theta)) \vec{k}_1$$

d. le poids de M et les forces d'inertie :

$$- \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}_1 : \text{poids de } M$$

$$- \vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e(M) = (ma\omega^2 + mr\omega^2 \sin(\theta)) \vec{i}_1 : \text{force d'inertie d'entraînement}$$

$$- \vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c(M) = -2mr\omega\dot{\theta} \cos(\theta) \vec{j}_1 : \text{force d'inertie de Coriolis}$$

2.

Application du théorème de la quantité du mouvement (P.F.D) dans le repère R_1 :

\mathfrak{R}_1 est en mouvement de rotation par rapport à \mathfrak{R} fixe (galiléen) $\Rightarrow \mathfrak{R}_1$ est non galiléen

$$\Rightarrow \text{P.F.D dans } \mathfrak{R}_1 \text{ s'écrit : } m\vec{\gamma}_r(M) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c \text{ avec } \sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R}$$

$$\text{Soit } \vec{R} = R_\rho \vec{e}_\rho + R_\theta \vec{e}_\theta + R_z \vec{e}_z$$

M se meut sans frottement sur le cerceau (C) \Rightarrow la composante tangentielle est nulle c-à-d $R_\theta = 0 \Rightarrow \vec{R} = R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z$

$$\text{P.F.D dans } \mathfrak{R}_1 \text{ s'écrit ainsi :}$$

$$m(r\ddot{\theta} \cos(\theta) - r\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - a\omega^2 - r\omega^2 \sin(\theta)) \vec{i}_1 + 2mr\omega\dot{\theta} \cos(\theta) \vec{j}_1 \quad (\text{E})$$

$$- (mr\ddot{\theta} \sin(\theta) + mr\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - mg) \vec{k}_1 - R_\rho \vec{e}_\rho - R_z \vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\vec{e}_\theta \times (\text{E}) \Rightarrow$$

$$- m(r\ddot{\theta} \cos(\theta) - r\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - a\omega^2 - r\omega^2 \sin(\theta)) \cos(\theta) - (mr\ddot{\theta} \sin(\theta) + mr\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - mg) \sin(\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{r} \sin(\theta) + \frac{a}{r} \omega^2 \cos(\theta) + \omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta)$$

Equation différentielle du mouvement de M vérifiée par θ

$$\vec{e}_\rho \times (\text{E}) \Rightarrow$$

$$m(r\ddot{\theta} \cos(\theta) - r\dot{\theta}^2 \sin(\theta) - a\omega^2 - r\omega^2 \sin(\theta)) \sin(\theta) - (mr\ddot{\theta} \sin(\theta) + mr\dot{\theta}^2 \cos(\theta) - mg) \cos(\theta) - R_\rho = 0$$

$$\Rightarrow R_\rho = mg \cos(\theta) - mr\dot{\theta}^2 - ma\omega^2 \sin(\theta) - mr\omega^2 \sin^2(\theta)$$

$$\vec{e}_z \times (\text{E}) \Rightarrow$$

$$- 2mr\omega\dot{\theta} \cos(\theta) - R_z = 0$$

$$\Rightarrow R_z = -2mr\omega\dot{\theta} \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \vec{R} = (mg \cos(\theta) - mr\dot{\theta}^2 - ma\omega^2 \sin(\theta) - mr\omega^2 \sin^2(\theta)) \vec{e}_\rho - 2mr\omega\dot{\theta} \cos(\theta) \vec{e}_z$$

Relation entre θ et $\dot{\theta}$:

$$\dot{\theta} \ddot{\theta} = \frac{g}{r} \sin(\theta) \dot{\theta} + \frac{a}{r} \omega^2 \cos(\theta) \dot{\theta} + \omega^2 \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = -\frac{g}{r} \frac{d \cos(\theta)}{dt} + \frac{a}{r} \omega^2 \frac{d \sin(\theta)}{dt} - \frac{\omega^2}{4} \frac{d \cos(2\theta)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -\frac{g}{r} \cos(\theta) + \frac{a}{r} \omega^2 \sin(\theta) - \frac{\omega^2}{4} \cos(2\theta) + cte$$

$$\text{A } t = 0 : \theta = \dot{\theta} = 0 \Rightarrow cte = \frac{g}{r} + \frac{\omega^2}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -\frac{g}{r} \cos(\theta) + \frac{a}{r} \omega^2 \sin(\theta) - \frac{\omega^2}{4} \cos(2\theta) + \frac{g}{r} + \frac{\omega^2}{4}$$

$$\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta) \Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -\frac{g}{r} \cos(\theta) + \frac{a}{r} \omega^2 \sin(\theta) - \frac{\omega^2}{4} + \frac{\omega^2}{2} \sin^2(\theta) + \frac{g}{r} + \frac{\omega^2}{4}$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{r} (1 - \cos(\theta)) + \omega^2 \sin(\theta) \left(\frac{2a}{r} + \sin(\theta) \right)$$

3.

Cas particulier : le plan (P) est fixe :

$$\Rightarrow \vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_e(M) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) = r\dot{\theta} \cos(\theta) \vec{j}_1 - r\dot{\theta} \sin(\theta) \vec{k}_1$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_e(M) = \vec{0}, \vec{\gamma}_c(M) = \vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma}_a(M) = \vec{\gamma}_r(M) = (r\ddot{\theta} \cos(\theta) - r\dot{\theta}^2 \sin(\theta)) \vec{j}_1 - (r\ddot{\theta} \sin(\theta) + r\dot{\theta}^2 \cos(\theta)) \vec{k}_1$$

$$\Rightarrow \vec{F}_e = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_c = \vec{0}$$

Le plan (P) est fixe $\Rightarrow \mathfrak{R}_1$ est fixe par rapport à $\mathfrak{R} \Rightarrow \mathfrak{R}_1$ est galiléen

$$\Rightarrow \text{P.F.D dans } \mathfrak{R}_1 \text{ s'écrit : } m\vec{\gamma}(M / \mathfrak{R}_1) = \sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{P} + \vec{R} = -mg\vec{k}_1 + R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow (mr\ddot{\theta} \cos(\theta) - mr\dot{\theta}^2 \sin(\theta)) \vec{j}_1 - (mr\ddot{\theta} \sin(\theta) + mr\dot{\theta}^2 \cos(\theta)) \vec{k}_1 = -mg\vec{k}_1 + R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z \quad (\text{E})$$

$$\vec{e}_\theta \times (\text{E}) \Rightarrow (-mr\ddot{\theta} \cos(\theta) + mr\dot{\theta}^2 \sin(\theta)) \cos(\theta) - (mr\ddot{\theta} \sin(\theta) + mr\dot{\theta}^2 \cos(\theta)) \sin(\theta) = -mg \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{r} \sin(\theta) : \text{Equation différentielle du mouvement de } M \text{ vérifiée par } \theta$$

$$\vec{e}_\rho \times (\text{E}) \Rightarrow R_\rho = mg \cos(\theta) - mr\dot{\theta}^2$$

$$\vec{e}_z \times (\text{E}) \Rightarrow R_z = 0$$

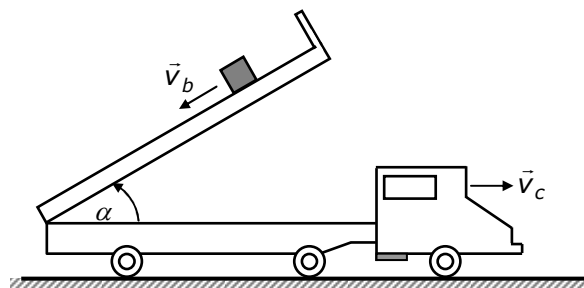
$$\Rightarrow \vec{R} = (mg \cos(\theta) - mr\dot{\theta}^2) \vec{e}_\rho$$

Relation entre θ et $\dot{\theta}$:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{r} \sin(\theta) \dot{\theta} \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = -\frac{g}{r} \frac{d \cos(\theta)}{dt} \Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -\frac{g}{r} \cos(\theta) + \text{cte}$$

$$\text{A } t = 0 : \theta = \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \text{cte} = \frac{g}{r} \Rightarrow \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = -\frac{g}{r} \cos(\theta) + \frac{g}{r} \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{2g}{r} (1 - \cos(\theta))$$

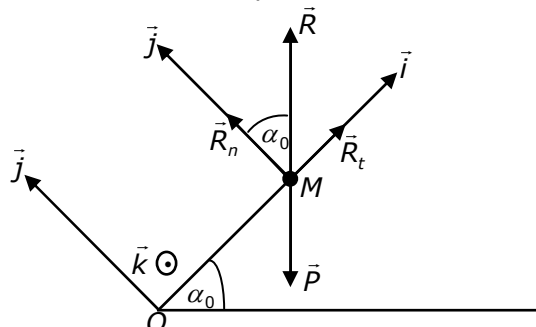
Exercice 2 :



1.

Camion immobile :

a. angle limite α_0 pour provoquer le glissement de la brique :
La brique est considérée comme un point matériel M



A l'équilibre : $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow -mg \sin(\alpha_0) \vec{i} - mg \cos(\alpha_0) \vec{j} + R_t \vec{i} + R_n \vec{j} = \vec{0}$

$R_t = \|\vec{R}_t\|$: composante tangente à la benne

$R_n = \|\vec{R}_n\|$: composante normale à la benne

$\Rightarrow R_t = mg \sin(\alpha_0)$ et $R_n = mg \cos(\alpha_0) \Rightarrow \tan(\alpha_0) = \frac{R_t}{R_n}$

A l'équilibre statique : $\|\vec{R}_t\| \leq k_s \|\vec{R}_n\|$ où k_s est le coefficient de frottement statique.

Juste à la rupture de l'équilibre ($\alpha = \alpha_0$) : $\|\vec{R}_t\| = k_s \|\vec{R}_n\| \Rightarrow \frac{\|\vec{R}_t\|}{\|\vec{R}_n\|} = k_s$

$\Rightarrow \tan(\alpha_0) = k_s \Rightarrow \alpha_0 = \arctan(k_s) \Rightarrow \alpha_0 = 31^\circ$

b. Accélération de la brique si $\alpha = 45^\circ$:

$\alpha = 45^\circ > \alpha_0 \Rightarrow$ la brique ne reste pas en équilibre statique sur la benne.

$\Rightarrow \vec{P} + \vec{R} = m\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R}) \Rightarrow -mg \sin(\alpha_0) \vec{i} - mg \cos(\alpha_0) \vec{j} + R_t \vec{i} + R_n \vec{j} = m\gamma_x \vec{i}$

$\Rightarrow m\gamma_x = R_t - mg \sin(\alpha_0)$ et $R_n = mg \cos(\alpha_0)$

La brique est en mouvement avec frottement $\Rightarrow \|\vec{R}_t\| = k_d \|\vec{R}_n\| \Rightarrow R_t = k_d R_n$, k_d est le coefficient de frottement dynamique.

$\Rightarrow R_t = k_d mg \cos(\alpha_0) \Rightarrow m\gamma_x = k_d mg \cos(\alpha_0) - mg \sin(\alpha_0)$

$\Rightarrow \gamma_x = g(k_d \cos(\alpha_0) - \sin(\alpha_0))$

$\Rightarrow \|\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})\| = |\gamma_x| = |g(k_d \cos(\alpha_0) - \sin(\alpha_0))|$

\Rightarrow A.N : $\|\vec{\gamma}(M/\mathfrak{R})\| = 4.95 \text{ms}^{-2}$

2.

Le camion en mouvement rectiligne uniforme par rapport au sol avec une vitesse \vec{v}_c :

La boîte est considérée comme un point matériel M glissant sur la benne avec une vitesse constante $v_b = 0.5 \text{ms}^{-1}$.

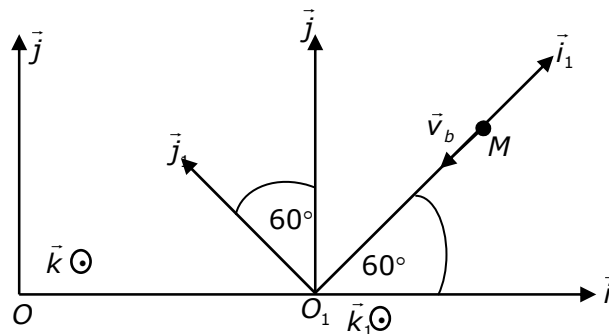
$\vec{i}_1 = \cos(\omega t) \vec{j} + \sin(\omega t) \vec{j}$

$\vec{j}_1 = -\sin(\omega t) \vec{i} + \cos(\omega t) \vec{j}$

$\vec{k}_1 = \vec{k}$

$\frac{d\vec{i}_1}{dt/\mathfrak{R}} = \frac{d\vec{j}_1}{dt/\mathfrak{R}} = \frac{d\vec{k}_1}{dt/\mathfrak{R}} = \vec{0}$

$\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1/\mathfrak{R}) = \vec{0}$



$\mathfrak{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ référentiel lié au sol (absolu)

$\mathfrak{R}_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ référentiel lié au camion (relatif)

\mathfrak{R}_1 est en mouvement de translation uniforme par rapport à \mathfrak{R} de vitesse $\vec{v}_c = \vec{cte}$

O_1 est fixe dans $\mathfrak{R}_1 \Rightarrow \vec{v}(O_1/\mathfrak{R}) = \vec{v}_c$

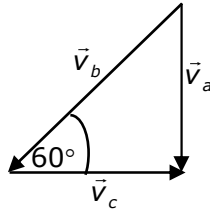
$\Rightarrow -\vec{v}_e(M) = \vec{v}_c$ (vitesse d'entraînement de M est égale à la vitesse du camion dans \mathfrak{R})

- $\vec{v}_r(M) = \vec{v}_b$ (vitesse relative de M est égale à la vitesse de la boîte dans \mathfrak{R}_1)

Loi de composition des vitesses : $\vec{v}_a(M) = \vec{v}_r(M) + \vec{v}_e(M) = \vec{v}_b + \vec{v}_c$

a. Un observateur au sol voit la boîte tomber verticalement c'est-à-dire le vecteur $\vec{v}_a(M)$ est vertical au sol.

Ainsi, d'après la loi de composition des vitesses, on obtient le schéma suivant :



D'après ce schéma on obtient :

- $v_c = v_b \cos(60^\circ) = 0.25 \text{ms}^{-1}$: vitesse du camion par rapport au sol

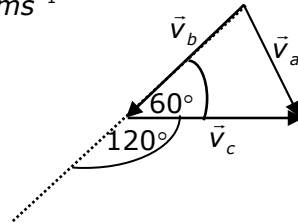
- $v_a = v_b \sin(60^\circ) = 0.43 \text{ms}^{-1}$: vitesse de la boîte par rapport au sol (vitesse absolue de la boîte)

b. On calcule la vitesse de la boîte par rapport au sol (vitesse absolue de la boîte v_a), si la vitesse du camion est $v_c = 0.5 \text{m.s}^{-1}$:

$$\vec{v}_a(M) = \vec{v}_b + \vec{v}_c \Rightarrow \|\vec{v}_a(M)\|^2 = \|\vec{v}_b\|^2 + \|\vec{v}_c\|^2 + 2\vec{v}_b\vec{v}_c \cos(\widehat{\vec{v}_b, \vec{v}_c})$$

$$(\widehat{\vec{v}_b, \vec{v}_c}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \Rightarrow v_a = 0.5 \text{ms}^{-1}$$

Ou bien : $v_b = v_c = 0.5 \text{ms}^{-1}$ et $\alpha = 60^\circ \Rightarrow$ le triangle formé par les trois vecteurs \vec{v}_a , \vec{v}_b et \vec{v}_c est équilatéral $\Rightarrow v_a = v_b = v_c = 0.5 \text{ms}^{-1}$



Autre méthode :

Pour la question **2.**, on peut faire un calcul direct sans utiliser la loi de composition des vitesses.

$$\vec{v}_a = \vec{v}(M / \mathfrak{R}) = \frac{d\vec{OM}}{dt / \mathfrak{R}} = \frac{d\vec{OO}_1}{dt / \mathfrak{R}} + \frac{d\vec{O}_1M}{dt / \mathfrak{R}_1} + \underbrace{\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge \vec{O}_1M}_{\vec{0}} \Rightarrow \vec{v}_a = \vec{v}(O_1 / \mathfrak{R}) + \vec{v}(M / \mathfrak{R}_1)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_a = v_c \vec{i} - v_b \vec{i}_1 = v_c \vec{i} - v_b \cos(\alpha) \vec{i} - v_b \sin(\alpha) \vec{j} \Rightarrow \vec{v}_a = (v_c - v_b \cos(\alpha)) \vec{i} - v_b \sin(\alpha) \vec{j}$$

a. si la boîte est tombée verticalement $\Rightarrow \vec{v}_a \perp \vec{i} \Rightarrow \vec{v}_a = -v_a \vec{j}$

$$\Rightarrow -v_a \vec{j} = (v_c - v_b \cos(\alpha)) \vec{i} - v_b \sin(\alpha) \vec{j}$$

$$\Rightarrow v_a = v_b \sin(\alpha) \text{ et } v_c = v_b \cos(\alpha)$$

$$\Rightarrow v_a = 0.43 \text{ms}^{-1} \text{ et } v_c = 0.25 \text{ms}^{-1}$$

b. si la vitesse du camion est $v_c = 0.5 \text{m.s}^{-1}$:

$$-v_a \vec{j} = (v_c - v_b \cos(\alpha)) \vec{i} - v_b \sin(\alpha) \vec{j} \Rightarrow v_a = \sqrt{(v_c - v_b \cos(\alpha))^2 + v_b^2 \sin^2(\alpha)}$$

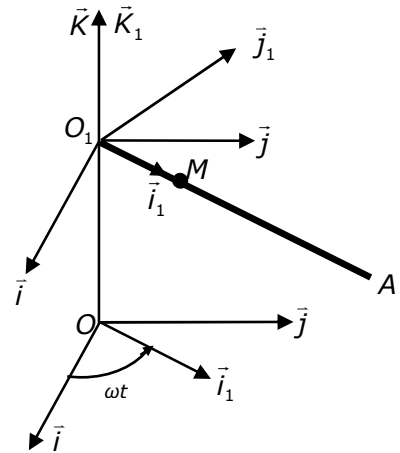
$$\Rightarrow v_a = \sqrt{v_c^2 + v_b^2 - 2v_c v_b \cos(\alpha)} \Rightarrow v_a = 0.5 \text{ms}^{-1}$$

Série N° 4
Théorèmes généraux de la dynamique du point matériel

Exercice 1

On considère le repère fixe $\mathfrak{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (repère absolu), (xOy) étant le plan horizontal. Soit une tige homogène (O_1A) de longueur ℓ , en mouvement autour de l'axe $(O\vec{k})$ avec une vitesse angulaire constante ω . On désigne par $\mathfrak{R}_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ un repère lié à la tige (repère relatif) tel que le plan $(x_1O_1y_1)$ reste constamment parallèle au plan (xOy) et $\vec{k}_1 = \vec{k}$. L'origine O_1 de \mathfrak{R}_1 se déplace le long de l'axe $(O\vec{k})$ tel que $\overrightarrow{OO_1} = \frac{1}{2}at^2\vec{k}$. Soit un point M , de masse m , se déplaçant sans frottement sur la tige (O_1A) et repéré dans \mathfrak{R}_1 par $\overrightarrow{O_1M} = x_1(t)\vec{i}_1$. (a et ω étant des constantes positives).

1. Exprimer dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$:
 - a. la vitesse du point M par rapport au repère \mathfrak{R} .
 - b. la vitesse du point M par rapport au repère \mathfrak{R}_1 .
 - c. le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\mathfrak{R}_1)$.
 - d. le poids de M et les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.
2. Le repère \mathfrak{R}_1 est-il Galiléen ou non Galiléen ? Justifier votre réponse.
3. En appliquant le théorème de la quantité du mouvement dans le repère \mathfrak{R}_1 , déterminer une équation différentielle du second ordre en t vérifiée par x_1 et les composantes de la réaction \vec{R} , exercée sur M par la tige, dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$.
4. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère \mathfrak{R}_1 , retrouver les composantes de la réaction \vec{R} , exercée sur M par la tige, dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$.
5. Calculer l'énergie potentielle de M par rapport au repère \mathfrak{R} .
6. Calculer l'énergie potentielle de M par rapport au repère \mathfrak{R}_1 .
7. Calculer l'énergie cinétique de M par rapport au repère \mathfrak{R}_1 .
8. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère \mathfrak{R}_1 , retrouver l'équation différentielle du second ordre en t vérifiée par x_1 .
9. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère \mathfrak{R}_1 , retrouver l'équation différentielle du second ordre en t vérifiée par x_1 .



Exercice 2

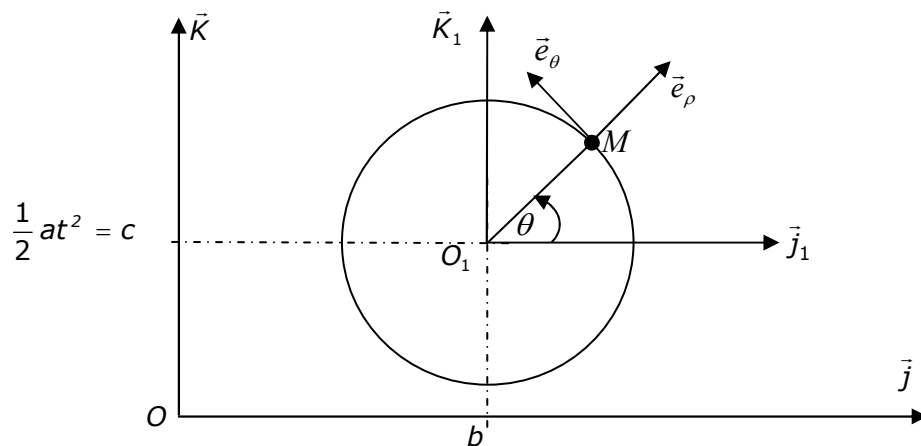
On considère le repère fixe $\mathfrak{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (repère absolu), (yOz) étant le plan vertical. Soit un cerceau (C) de centre O_1 et de rayon R , en mouvement de translation dans le plan (yOz) tel que $\overrightarrow{OO_1} = b\vec{j} + \frac{1}{2}at^2\vec{k}$ ((yOz) étant le plan du cerceau, a et b étant des constantes positives non nulles). On désigne par $\mathfrak{R}_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ un repère lié au cerceau (repère relatif) tel que $\vec{i}_1 = \vec{i}$, $\vec{j}_1 = \vec{j}$ et $\vec{k}_1 = \vec{k}$. Soit un point M , de masse m , se déplaçant sans frottement sur le cerceau (C) et repéré dans \mathfrak{R}_1 par l'angle θ (voir la figure ci-dessous). On suppose qu'à $t = 0$, $\theta = 0$ et $E_p(M/\mathfrak{R}) = E_p(M/\mathfrak{R}_1) = 0$.

1. Exprimer dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$:
 - a. les vecteurs de la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$.
 - b. le vecteur vitesse du point M par rapport au repère \mathfrak{R} , $\vec{v}(M/\mathfrak{R})$.
 - c. le vecteur vitesse du point M par rapport au repère \mathfrak{R}_1 , $\vec{v}(M/\mathfrak{R}_1)$.

d. le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\mathfrak{R}_1)$ et sa dérivée temporelle $\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\mathfrak{R}_1)}{dt/\mathfrak{R}_1}$

e. le poids de M et les forces d'inertie.

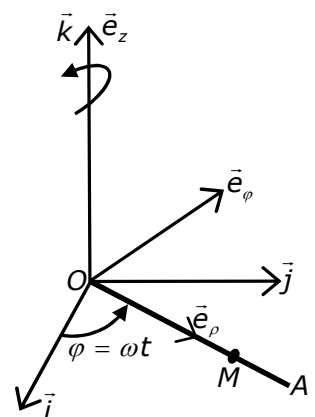
2. Le repère \mathfrak{R}_1 est-il Galiléen ou non Galiléen ? Justifier votre réponse.
3. Calculer l'énergie potentielle de M par rapport au repère \mathfrak{R} .
4. Calculer l'énergie potentielle de M par rapport au repère \mathfrak{R}_1 .
5. Calculer l'énergie cinétique de M par rapport au repère \mathfrak{R}_1 : $E_c(M/\mathfrak{R}_1)$.
6. En appliquant le théorème de la quantité de mouvement dans le repère \mathfrak{R}_1 , déterminer une équation différentielle du mouvement de second ordre en t vérifiée par θ et les composantes de la réaction \vec{R} , exercée sur M par le cerceau, dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$.
7. En appliquant le théorème de l'énergie cinétique dans le repère \mathfrak{R}_1 , retrouver l'équation différentielle du mouvement de second ordre en t vérifiée par θ .
8. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère \mathfrak{R}_1 , retrouver l'équation différentielle du mouvement de second ordre en t vérifiée par θ .
9. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le repère \mathfrak{R}_1 , retrouver l'équation différentielle du mouvement de second ordre en t vérifiée par θ .



Exercice 3 :

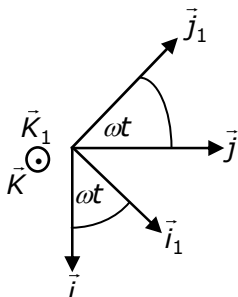
On considère le repère fixe $\mathfrak{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (repère absolu), (\vec{i}, \vec{j}) étant le plan horizontal. Soit une tige horizontale (OA) , en mouvement autour de l'axe $(O\vec{k})$ avec une vitesse angulaire constante ω . On désigne par $\mathfrak{R}_1(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ le repère lié à la tige (repère relatif). Soit un anneau assimilé à un point matériel M , de masse m , se déplaçant sans frottement sur la tige (OA) et repéré dans \mathfrak{R} par ses coordonnées polaires ρ et φ (voir la figure ci-contre). On suppose que $\rho(t=0) = \rho_0$ et $\dot{\rho}(t=0) = 0$.

1. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique dans le repère \mathfrak{R} , déterminer l'équation différentielle du mouvement de M . Donner la solution de cette équation en fonction de ρ_0 et ω .
2. Maintenant l'anneau est soumis à une force de rappel par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k , de masse négligeable et de longueur à vide ρ_0 . Le ressort est enfilé sur la tige, une extrémité est fixée en O et l'autre est attachée au point M . En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans \mathfrak{R} , établir la nouvelle équation différentielle du mouvement de l'anneau lors de la rotation de la tige en fonction de $\ddot{\rho}, \rho, \rho_0, k, m$ et ω .



Solution de série N° 4
Théorèmes généraux de la dynamique du point matériel

Exercice 1



$$\begin{aligned} \vec{i}_1 &= \cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j} \\ \vec{j}_1 &= -\sin(\omega t)\vec{i} + \cos(\omega t)\vec{j} \\ \vec{k}_1 &= \vec{k} \\ \frac{d\vec{i}_1}{dt / \mathfrak{R}} &= \omega\vec{j}_1, \quad \frac{d\vec{j}_1}{dt / \mathfrak{R}} = -\omega\vec{i}_1, \quad \frac{d\vec{k}_1}{dt / \mathfrak{R}} = \vec{0} \\ \vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) &= \omega\vec{k} = \omega\vec{k}_1 \end{aligned}$$

$$\vec{OM} = \vec{OO}_1 + \vec{O}_1\vec{M} = \frac{1}{2}at^2\vec{k} + x_1(t)\vec{j}_1 = \frac{1}{2}at^2\vec{k}_1 + x_1(t)\vec{j}_1 \quad (a \text{ est une constante})$$

1. On exprime dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$:

a. la vitesse du point M par rapport au repère R :

$$\begin{aligned} \vec{v}(M / \mathfrak{R}) &= \frac{d\vec{OM}}{dt / \mathfrak{R}} = \frac{d\left(\frac{1}{2}at^2\vec{k}_1 + x_1(t)\vec{j}_1\right)}{dt / \mathfrak{R}} = at\vec{k}_1 + \dot{x}_1\vec{j}_1 + x_1\omega\vec{j}_1 \\ \Rightarrow \vec{v}(M / \mathfrak{R}) &= \dot{x}_1\vec{j}_1 + x_1\omega\vec{j}_1 + at\vec{k}_1 \end{aligned}$$

b. la vitesse du point M par rapport au repère R_1 :

$$\begin{aligned} \vec{v}(M / \mathfrak{R}_1) &= \frac{d\vec{O}_1\vec{M}}{dt / \mathfrak{R}_1} = \frac{d(x_1(t)\vec{i}_1)}{dt / \mathfrak{R}_1} = \dot{x}_1\vec{i}_1 \\ \Rightarrow \vec{v}(M / \mathfrak{R}_1) &= \dot{x}_1\vec{i}_1 \end{aligned}$$

c. le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\mathfrak{R}_1)$:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{O_1}(M/\mathfrak{R}_1) &= \vec{O}_1\vec{M} \wedge m\vec{v}(M/\mathfrak{R}_1) \\ \vec{O}_1\vec{M} \wedge m\vec{v}(M/\mathfrak{R}_1) &= x_1\vec{i}_1 \wedge \dot{x}_1\vec{i}_1 = \vec{0}_1 \Rightarrow \vec{\sigma}_{O_1}(M / \mathfrak{R}_1) = \vec{0} \end{aligned}$$

d. le poids de M et les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}_1$: poids de M
- $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e(M)$: force d'inertie d'entraînement
- $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c(M)$: force d'inertie de Coriolis

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1 / \mathfrak{R}) + \frac{d\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R})}{dt / \mathfrak{R}} \wedge \vec{O}_1\vec{M} + \vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge \vec{O}_1\vec{M})$$

$$\vec{\gamma}(O_1 / \mathfrak{R}) = \frac{d^2\vec{OO}_1}{dt^2 / \mathfrak{R}} = \frac{d^2\left(\frac{1}{2}at^2\vec{k}\right)}{dt^2 / \mathfrak{R}} = a\vec{k} = a\vec{k}_1$$

$$\frac{d\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R})}{dt / \mathfrak{R}} \wedge \vec{O}_1\vec{M} = \vec{0} \wedge \vec{O}_1\vec{M} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge (\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge \vec{O}_1\vec{M}) &= \omega\vec{k}_1 \wedge (\omega\vec{k}_1 \wedge x_1\vec{i}_1) = \omega\vec{k}_1 \wedge \omega x_1\vec{j}_1 = -\omega^2 x_1\vec{i}_1 \\ \Rightarrow \vec{\gamma}_e(M) &= a\vec{k}_1 - \omega^2 x_1\vec{i}_1 \end{aligned}$$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge \vec{v}_r(M) = 2\omega\vec{k}_1 \wedge \dot{x}_1\vec{i}_1 = 2\omega\dot{x}_1\vec{j}_1$$

$$\Rightarrow \vec{F}_e = m x_1 \omega^2 \vec{i}_1 - m a \vec{k}_1, \quad \vec{F}_c = -2m \omega \dot{x}_1 \vec{j}_1$$

2. Le repère \mathfrak{R}_1 est en mouvement de rotation par rapport au repère fixe \mathfrak{R} (galiléen)

$\Rightarrow \mathfrak{R}_1$ est non Galiléen.

3. Théorème de la quantité du mouvement dans le repère \mathfrak{R}_1 :

$$\mathfrak{R}_1 \text{ est non Galiléen} \Rightarrow m\vec{\gamma}(M / \mathfrak{R}_1) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} \text{ où } \vec{R} = R_1\vec{i}_1 + R_2\vec{j}_1 + R_3\vec{k}_1$$

N.B : On exprime la réaction \vec{R} dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ pour faire apparaître sa composante tangentielle (tangente à la trajectoire).

Mouvement sans frottement \Rightarrow la composante tangentielle de la réaction est nulle c'est-à-dire $R_1 = 0 \Rightarrow \vec{R} = R_2\vec{j}_1 + R_3\vec{k}_1$

P.F.D dans \mathfrak{R}_1 s'écrit :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1\vec{i}_1 &= -mg\vec{k}_1 + R_2\vec{j}_1 + R_3\vec{k}_1 + mx_1\omega^2\vec{i}_1 - ma\vec{k}_1 - 2m\omega\dot{x}_1\vec{j}_1 \\ \Rightarrow (m\ddot{x}_1 - mx_1\omega^2)\vec{i}_1 + (mg - R_3 + ma)\vec{k}_1 - (R_2 - 2m\omega\dot{x}_1)\vec{j}_1 &= \vec{0} \\ \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x}_1 - mx_1\omega^2 = 0 \\ R_2 - 2m\omega\dot{x}_1 = 0 \\ mg - R_3 + ma = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1 - x_1\omega^2 = 0 \\ R_2 = 2m\omega\dot{x}_1 \\ R_3 = mg + ma \end{cases} \end{aligned}$$

\Rightarrow Equation différentielle du second ordre en t vérifiée par x_1 : $\ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$

Réaction \vec{R} exercée sur M par la tige : $\vec{R} = 2m\omega\dot{x}_1\vec{j}_1 + (mg + ma)\vec{k}_1$

4. Théorème du moment cinétique dans le repère \mathfrak{R}_1 :

N.B : Pour appliquer le théorème du moment cinétique dans le référentiel \mathfrak{R}_1 , il est préférable de choisir un point fixe dans \mathfrak{R}_1 . Pour un point mobile A dans \mathfrak{R}_1 , ce théorème, s'écrit :

$$\frac{d\vec{\sigma}_A(M/R_1)}{dt / \mathfrak{R}_1} = \vec{m}_A \left(\sum \vec{F}_{ext} \right) + \vec{m}_A (\vec{F}_e) + \vec{m}_A (\vec{F}_c) + m\vec{v}(M / \mathfrak{R}_1) \wedge \vec{v}(A / \mathfrak{R}_1)$$

\mathfrak{R}_1 est non galiléen et O_1 est fixe dans $\mathfrak{R}_1 \Rightarrow$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1)}{dt / \mathfrak{R}_1} = \vec{m}_{O_1} \left(\sum \vec{F}_{ext} \right) + \vec{m}_{O_1} (\vec{F}_e) + \vec{m}_{O_1} (\vec{F}_c)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1)}{dt / \mathfrak{R}_1} = \vec{0}$$

$$\vec{m}_{O_1} \left(\sum \vec{F}_{ext} \right) = \vec{m}_{O_1} (\vec{P}) + \vec{m}_{O_1} (\vec{R}) = \vec{O}_1\vec{M} \wedge \vec{P} + \vec{O}_1\vec{M} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{m}_{O_1} (\vec{P}) = \vec{O}_1\vec{M} \wedge \vec{P} = x_1\vec{i}_1 \wedge (-mg\vec{k}_1) = mgx_1\vec{j}_1$$

$$\vec{m}_{O_1} (\vec{R}) = \vec{O}_1\vec{M} \wedge \vec{R} = x_1\vec{i}_1 \wedge R_2\vec{j}_1 + x_1\vec{i}_1 \wedge R_3\vec{k}_1 = x_1R_2\vec{k}_1 - x_1R_3\vec{j}_1$$

$$\vec{m}_{O_1} (\vec{F}_e) = \vec{O}_1\vec{M} \wedge \vec{F}_e = x_1\vec{i}_1 \wedge (mx_1\omega^2\vec{i}_1 - ma\vec{k}_1) = max_1\vec{j}_1$$

$$\vec{m}_{O_1} (\vec{F}_c) = \vec{O}_1\vec{M} \wedge \vec{F}_c = x_1\vec{i}_1 \wedge (-2m\omega\dot{x}_1\vec{j}_1) = -2m\omega x_1\dot{x}_1\vec{k}_1$$

$$\Rightarrow mgx_1\vec{j}_1 + x_1R_2\vec{k}_1 - x_1R_3\vec{j}_1 + max_1\vec{j}_1 - 2m\omega x_1\dot{x}_1\vec{k}_1 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow (mgx_1 + max_1 - x_1R_3)\vec{j}_1 + (x_1R_2 - 2m\omega x_1\dot{x}_1)\vec{k}_1 = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mgx_1 + max_1 - x_1R_3 = 0 \\ x_1R_2 - 2m\omega x_1\dot{x}_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_3 = mg + ma \\ R_2 = 2m\omega\dot{x}_1 \end{cases}$$

\Rightarrow On retrouve la réaction $\vec{R} = 2m\omega\dot{x}_1\vec{j}_1 + (mg + ma)\vec{k}_1$

5. Energie potentielle de M par rapport au repère \mathfrak{R} :

Dans le repère \mathfrak{R} , la seule force dérivant une énergie potentielle (conservative) est le poids de M (\vec{P}). Ainsi l'énergie potentielle du poids de M par rapport au repère \mathfrak{R} est :

$$E_p(M / \mathfrak{R}) = E_p(\vec{P} / \mathfrak{R})$$

$$dE_p(M / \mathfrak{R}) = dE_p(\vec{P} / \mathfrak{R}) = -dW(\vec{P} / \mathfrak{R}) = -\vec{P}d\vec{OM} = mg\vec{k}(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$\Rightarrow dE_p(M / \mathfrak{R}) = mgdz \Rightarrow E_p(M / \mathfrak{R}) = mgz + cte$$

Ou bien

$$\vec{P} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p) \rightarrow -mg\vec{k} = -\frac{\partial E_p}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial z} = mg \text{ (1)}, \quad \frac{\partial E_p}{\partial x} = 0 \text{ (2)}, \quad \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0 \text{ (3)}$$

$$(1) \rightarrow E_p = mgz + cte(x, y)$$

$$(2) \rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial x} = \frac{\partial cte(x, y)}{\partial x} = 0 \rightarrow cte(x, y) = cte(y) \rightarrow E_p = mgz + cte(y)$$

$$(3) \rightarrow \frac{\partial E_p}{\partial y} = \frac{\partial cte(y)}{\partial y} = 0 \rightarrow cte(y) = cte$$

$$\Rightarrow E_p(M / \mathfrak{R}) = mgz + cte$$

6. Energie potentielle de M par rapport au repère \mathfrak{R}_1 :

$$\vec{F}_e = mx_1\omega^2\vec{i}_1 - ma\vec{k}_1$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}_e) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}_e = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial y_1} & \frac{\partial}{\partial z_1} \\ 0 & 0 & -ma \\ mx_1\omega^2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_e \text{ est conservative dans } \mathfrak{R}_1$$

$$\Rightarrow E_p(M / \mathfrak{R}_1) = E_p(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) + E_p(\vec{P} / \mathfrak{R}_1)$$

Energie potentielle dérivée par \vec{F}_e par rapport au repère \mathfrak{R}_1 :

$$dE_p(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) = -dW(\vec{F}_e / \mathfrak{R}) = -\vec{F}_e d\vec{O}_1\vec{M} = (-mx_1\omega^2\vec{i}_1 + ma\vec{k}_1)(dx_1\vec{i}_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1)$$

$$M \in (O_1x_1) \forall t \Rightarrow dy_1 = dz_1 = y_1 = z_1 = 0 \Rightarrow dE_p(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) = (-mx_1\omega^2\vec{i}_1 + ma\vec{k}_1)dx_1\vec{i}_1$$

$$\Rightarrow dE_p(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) = -mx_1\omega^2 dx_1$$

$$\Rightarrow E_p(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) = -\frac{1}{2}mx_1^2\omega^2 + cte$$

Energie potentielle dérivée par \vec{P} par rapport au repère \mathfrak{R}_1 :

$$dE_p(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) = -dW(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) = -\vec{P}d\vec{O}_1\vec{M} = mg\vec{k}_1(dx_1\vec{i}_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1)$$

$$M \in (O_1x_1) \forall t \Rightarrow dy_1 = dz_1 = y_1 = z_1 = 0 \Rightarrow dE_p(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) = mg\vec{k}_1 dx_1\vec{i}_1$$

$$\Rightarrow dE_p(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) = 0$$

$$\Rightarrow E_p(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) = cte$$

$$\Rightarrow E_p(M / \mathfrak{R}_1) = -\frac{1}{2}mx_1^2\omega^2 + cte$$

7. Energie cinétique de M par rapport au repère \mathfrak{R}_1 :

$$E_c(M / \mathfrak{R}_1) = \frac{1}{2}m\vec{v}^2(M / \mathfrak{R}_1) = \frac{1}{2}m\|\vec{v}(M / \mathfrak{R}_1)\|^2$$

$$\Rightarrow E_c(M / \mathfrak{R}_1) = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2$$

8. Théorème de l'énergie cinétique dans le repère \mathfrak{R}_1 :

$$\mathfrak{R}_1 \text{ est non Galiléen} \Rightarrow dE_c(M/\mathfrak{R}_1) = dW(\sum \vec{F}_{ext} / \mathfrak{R}_1) + dW(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1)$$

$$(dW(\vec{F}_c / \mathfrak{R}_1) = 0 \text{ voir le cours})$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} \text{ avec } \vec{R} = R_2 \vec{j}_1 + R_3 \vec{k}_1$$

$$\Rightarrow dE_c(M/\mathfrak{R}_1) = dW(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) + dW(\vec{R} / \mathfrak{R}_1) + dW(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_c(M/\mathfrak{R}_1)}{dt} = \frac{dW(\vec{P} / \mathfrak{R}_1)}{dt} + \frac{dW(\vec{R} / \mathfrak{R}_1)}{dt} + \frac{dW(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dE_c(M/\mathfrak{R}_1)}{dt} = P(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) + P(\vec{R} / \mathfrak{R}_1) + P(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) \quad (P : \text{puissance})$$

$$\frac{dE_c(M/\mathfrak{R}_1)}{dt} = m \dot{x}_1 \ddot{x}_1$$

$$P(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) = \vec{P} \vec{v}(M / \mathfrak{R}_1) = -mg \vec{k}_1 \dot{x}_1 \vec{i}_1 = 0$$

$$P(\vec{R} / \mathfrak{R}_1) = \vec{R} \vec{v}(M / \mathfrak{R}_1) = (R_2 \vec{j}_1 + R_3 \vec{k}_1) \dot{x}_1 \vec{i}_1 = 0$$

$$P(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) = \vec{F}_e \vec{v}(M / \mathfrak{R}_1) = (m x_1 \omega^2 \vec{i}_1 - m a \vec{k}_1) \dot{x}_1 \vec{i}_1 = m x_1 \omega^2 \dot{x}_1$$

$$\Rightarrow m \dot{x}_1 \ddot{x}_1 = m x_1 \omega^2 \dot{x}_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 = \omega^2 x_1$$

\Rightarrow On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$

9. Théorème de l'énergie mécanique dans le repère \mathfrak{R}_1 :

Rappel :

Théorème de l'énergie mécanique dans un référentiel non galiléen \mathfrak{R}_1

$$dE_m(M/\mathfrak{R}_1) = dW(\vec{F}_{ncon} / \mathfrak{R}_1) + dW(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) \text{ si } \vec{F}_e \text{ est non conservative}$$

Si \vec{F}_e est conservative, ce théorème s'écrit : $dE_m(M/\mathfrak{R}_1) = dW(\vec{F}_{ncon} / \mathfrak{R}_1)$

en tenant compte de l'énergie potentielle dérivée par \vec{F}_e dans le référentiel \mathfrak{R}_1 .

\mathfrak{R}_1 est non Galiléen $\Rightarrow dE_m(M/\mathfrak{R}_1) = dW(\vec{F}_{ncon} / \mathfrak{R}_1)$ en tenant compte de l'énergie potentielle dérivée par \vec{F}_e dans le référentiel \mathfrak{R}_1 (\vec{F}_e est conservative dans \mathfrak{R}_1)

$$\Rightarrow \frac{dE_m(M/\mathfrak{R}_1)}{dt} = \frac{dW(\vec{F}_{ncon} / \mathfrak{R}_1)}{dt} = P(\vec{F}_{ncon} / \mathfrak{R}_1)$$

$$E_m(M/\mathfrak{R}_1) = E_c(M/\mathfrak{R}_1) + E_p(M/\mathfrak{R}_1) = \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 - \frac{1}{2} m x_1^2 \omega^2 + cte$$

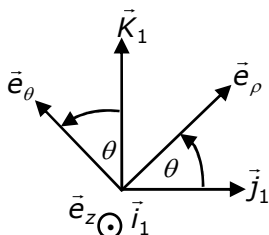
$$\Rightarrow \frac{dE_m(M/\mathfrak{R}_1)}{dt} = m \dot{x}_1 \ddot{x}_1 - m \omega^2 x_1 \dot{x}_1$$

$$\vec{F}_{ncon} = \vec{R} \Rightarrow P(\vec{F}_{ncon} / \mathfrak{R}_1) = P(\vec{R} / \mathfrak{R}_1) = \vec{R} \vec{v}(M / \mathfrak{R}_1) = (R_2 \vec{j}_1 + R_3 \vec{k}_1) \dot{x}_1 \vec{i}_1 = 0$$

$$\Rightarrow m \dot{x}_1 \ddot{x}_1 - m \omega^2 x_1 \dot{x}_1 = 0 \Rightarrow \ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$$

\Rightarrow On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{x}_1 - \omega^2 x_1 = 0$

Exercice 2



$$\vec{e}_\rho = \cos(\theta) \vec{j}_1 + \sin(\theta) \vec{k}_1$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin(\theta) \vec{j}_1 + \cos(\theta) \vec{k}_1$$

$$\vec{e}_z = \vec{i}_1$$

$$\frac{d\bar{e}_\rho}{dt / \mathfrak{R}_1} = \dot{\theta}\bar{e}_\theta, \quad \frac{d\bar{e}_\theta}{dt / \mathfrak{R}_1} = -\dot{\theta}\bar{e}_\rho, \quad \frac{d\bar{e}_z}{dt / \mathfrak{R}_1} = \bar{0}$$

\mathfrak{R}_1 est en translation par rapport à $\mathfrak{R} \Rightarrow \bar{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) = \bar{0}$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M} = b\bar{j} + \frac{1}{2}at^2\bar{k} + R\bar{e}_\rho \quad (a \text{ et } b \text{ sont des constantes positives non nulles})$$

$$\bar{i}_1 = \bar{i}, \quad \bar{j}_1 = \bar{j} \text{ et } \bar{k}_1 = \bar{k} \Rightarrow \overrightarrow{OM} = b\bar{j}_1 + \frac{1}{2}at^2\bar{k}_1 + R\bar{e}_\rho$$

1. On exprime dans la base $(\bar{e}_\rho, \bar{e}_\theta, \bar{e}_z)$:

a. les vecteurs de la base $(\bar{i}_1, \bar{j}_1, \bar{k}_1)$:

$$\begin{cases} \bar{e}_\rho = \cos(\theta)\bar{j}_1 + \sin(\theta)\bar{k}_1 \\ \bar{e}_\theta = -\sin(\theta)\bar{j}_1 + \cos(\theta)\bar{k}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos(\theta)\bar{e}_\rho = \cos^2(\theta)\bar{j}_1 + \cos(\theta)\sin(\theta)\bar{k}_1 \\ \sin(\theta)\bar{e}_\theta = -\sin^2(\theta)\bar{j}_1 + \sin(\theta)\cos(\theta)\bar{k}_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos(\theta)\bar{e}_\rho - \sin(\theta)\bar{e}_\theta = \bar{j}_1$$

$$\begin{cases} \bar{e}_\rho = \cos(\theta)\bar{j}_1 + \sin(\theta)\bar{k}_1 \\ \bar{e}_\theta = -\sin(\theta)\bar{j}_1 + \cos(\theta)\bar{k}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin(\theta)\bar{e}_\rho = \sin(\theta)\cos(\theta)\bar{j}_1 + \sin^2(\theta)\bar{k}_1 \\ \cos(\theta)\bar{e}_\theta = -\cos(\theta)\sin(\theta)\bar{j}_1 + \cos^2(\theta)\bar{k}_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sin(\theta)\bar{e}_\rho + \cos(\theta)\bar{e}_\theta = \bar{k}_1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{j}_1 = \cos(\theta)\bar{e}_\rho - \sin(\theta)\bar{e}_\theta \\ \bar{k}_1 = \sin(\theta)\bar{e}_\rho + \cos(\theta)\bar{e}_\theta \\ \bar{i}_1 = \bar{e}_z \end{cases}$$

b. le vecteur vitesse du point M par rapport au repère \mathfrak{R} :

$$\vec{v}(M / \mathfrak{R}) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt / \mathfrak{R}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt / \mathfrak{R}_1} + \underbrace{\bar{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge \overrightarrow{OM}}_{\bar{0}} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt / \mathfrak{R}_1}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M / \mathfrak{R}) = \frac{d\left(b\bar{j}_1 + \frac{1}{2}at^2\bar{k}_1 + R\bar{e}_\rho\right)}{dt / \mathfrak{R}_1} = at\bar{k}_1 + R\frac{d\bar{e}_\rho}{dt / \mathfrak{R}_1} = at\bar{k}_1 + R\dot{\theta}\bar{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M / \mathfrak{R}) = at(\sin(\theta)\bar{e}_\rho + \cos(\theta)\bar{e}_\theta) + R\dot{\theta}\bar{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{v}(M / \mathfrak{R}) = at\sin(\theta)\bar{e}_\rho + (R\dot{\theta} + at\cos(\theta))\bar{e}_\theta$$

c. le vecteur vitesse du point M par rapport au repère R_1 :

$$\vec{v}(M / \mathfrak{R}_1) = \frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt / \mathfrak{R}_1} = \frac{d(R\bar{e}_\rho)}{dt / \mathfrak{R}_1} = R\dot{\theta}\bar{e}_\theta \Rightarrow \vec{v}(M / \mathfrak{R}_1) = R\dot{\theta}\bar{e}_\theta$$

d. le moment cinétique $\vec{\sigma}_{O_1}(M/\mathfrak{R}_1)$ et sa dérivée temporelle $\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\mathfrak{R}_1)}{dt / \mathfrak{R}_1}$:

$$\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1) = \overrightarrow{O_1M} \wedge m\vec{v}(M/\mathfrak{R}_1) = R\bar{e}_\rho \wedge mR\dot{\theta}\bar{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1) = mR^2\dot{\theta}\bar{e}_z$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\mathfrak{R}_1)}{dt / \mathfrak{R}_1} = \frac{d(mR^2\dot{\theta}\bar{e}_z)}{dt / \mathfrak{R}_1} = mR^2\ddot{\theta}\bar{e}_z \Rightarrow \frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/\mathfrak{R}_1)}{dt / \mathfrak{R}_1} = mR^2\ddot{\theta}\bar{e}_z$$

e. le poids de M et les forces d'inertie :

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\sin(\theta)\bar{e}_\rho - mg\cos(\theta)\bar{e}_\theta$: poids de M
- $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e(M)$: force d'inertie d'entraînement
- $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c(M)$: force d'inertie de Coriolis

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(O_1 / \mathfrak{R}) + \frac{d\bar{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R})}{dt / \mathfrak{R}} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \bar{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge (\bar{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge \overrightarrow{O_1M})$$

$$\vec{\gamma}(O_1 / \mathfrak{R}) = \frac{d^2 \overrightarrow{OO_1}}{dt^2 / \mathfrak{R}} = \frac{d^2 \left(b\vec{j} + \frac{1}{2} at^2 \vec{k} \right)}{dt^2 / \mathfrak{R}} = a\vec{k} = a\vec{k}_1$$

$$\frac{d\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R})}{dt / \mathfrak{R}} \wedge \overrightarrow{O_1 M} = \vec{0} \wedge \overrightarrow{O_1 M} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge \left(\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge \overrightarrow{O_1 M} \right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}_e(M) = a\vec{k}_1 = a \sin(\theta)\vec{e}_\rho + a \cos(\theta)\vec{e}_\theta$$

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\vec{\Omega}(\mathfrak{R}_1 / \mathfrak{R}) \wedge \vec{v}_r(M) = \vec{0} \wedge R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_e = -ma \sin(\theta)\vec{e}_\rho - ma \cos(\theta)\vec{e}_\theta, \vec{F}_c = \vec{0}$$

\Rightarrow le poids de M et les forces d'inertie sont :

$$\vec{P} = -mg \sin(\theta)\vec{e}_\rho - mg \cos(\theta)\vec{e}_\theta, \vec{F}_e = -ma \sin(\theta)\vec{e}_\rho - ma \cos(\theta)\vec{e}_\theta, \vec{F}_c = \vec{0}$$

2. $\vec{\gamma}(O_1 / \mathfrak{R}) = a\vec{k} \Rightarrow \|\vec{\gamma}(O_1 / \mathfrak{R})\| = a > 0 \Rightarrow$ le point O_1 a un mouvement rectiligne accéléré suivant \vec{k}_1 .

Le point O_1 est un fixe dans \mathfrak{R}_1 et $\vec{i}_1 = \vec{i}$, $\vec{j}_1 = \vec{j}$ et $\vec{k}_1 = \vec{k} \forall t \Rightarrow \mathfrak{R}_1$ est en translation non uniforme par rapport à \mathfrak{R} , donc \mathfrak{R}_1 est un référentiel non galiléen.

3. Energie potentielle de M par rapport au repère \mathfrak{R} :

Dans le repère \mathfrak{R} , la seule force dérivant une énergie potentielle (conservative) est le poids de M (\vec{P}). Ainsi l'énergie potentielle du poids de M par rapport au repère \mathfrak{R} est :

$$E_p(M / \mathfrak{R}) = E_p(\vec{P} / \mathfrak{R})$$

$$dE_p(M / \mathfrak{R}) = dE_p(\vec{P} / \mathfrak{R}) = -dW(\vec{P} / \mathfrak{R}) = -\vec{P}d\overrightarrow{OM} = mg\vec{k}(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$\Rightarrow dE_p(M / \mathfrak{R}) = mgdz \Rightarrow E_p(M / \mathfrak{R}) = mgz + cte$$

$$\overrightarrow{OM} = b\vec{j} + \frac{1}{2} at^2 \vec{k} + R\vec{e}_\rho = b\vec{j} + \frac{1}{2} at^2 \vec{k} + R \cos(\theta)\vec{j} + R \sin(\theta)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = (b + R \cos(\theta))\vec{j} + \left(\frac{1}{2} at^2 + R \sin(\theta) \right) \vec{k}$$

$$\Rightarrow y = b + R \cos(\theta) \text{ et } z = \frac{1}{2} at^2 + R \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow E_p(M / \mathfrak{R}) = \frac{1}{2} mgat^2 + Rmg \sin(\theta) + cte$$

$$A t = 0 : \theta = 0 \text{ et } E_p(M / \mathfrak{R}) = 0 \Rightarrow cte = 0$$

$$\Rightarrow E_p(M / \mathfrak{R}) = \frac{1}{2} mgat^2 + Rmg \sin(\theta)$$

4. Energie potentielle de M par rapport au repère \mathfrak{R}_1 :

$$\vec{F}_e = -ma \sin(\theta)\vec{e}_\rho - ma \cos(\theta)\vec{e}_\theta = -ma\vec{k}_1, \vec{k}_1 = \sin(\theta)\vec{e}_\rho + \cos(\theta)\vec{e}_\theta$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{F}_e) = \vec{\nabla} \wedge \vec{F}_e = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z_1} & -ma \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -ma \end{vmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_e \text{ est conservative dans } \mathfrak{R}_1$$

$$\Rightarrow E_p(M / \mathfrak{R}_1) = E_p(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) + E_p(\vec{P} / \mathfrak{R})$$

Energie potentielle dérivée par \vec{F}_e par rapport au repère \mathfrak{R}_1 :

$$dE_p(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) = -dW(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) = -\vec{F}_e d\vec{O}_1\vec{M} = ma\vec{k}_1(dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1)$$

$$(M \in (y_1oz_1) \forall t \Rightarrow dx_1 = x_1 = 0)$$

$$\Rightarrow dE_p(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) = madz_1$$

$$\Rightarrow E_p(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) = maz_1 + cte$$

$$z_1 = R \sin(\theta) \Rightarrow E_p(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) = maR \sin(\theta) + cte$$

Energie potentielle dérivée par \vec{P} par rapport au repère \mathfrak{R}_1 :

$$dE_p(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) = -dW(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) = -\vec{P}d\vec{O}_1\vec{M} = mg\vec{k}_1(dx_1\vec{i}_1 + dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1)$$

$$M \in (y_1oz_1) \forall t \Rightarrow dx_1 = x_1 = 0 \Rightarrow dE_p(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) = mg\vec{k}_1[dy_1\vec{j}_1 + dz_1\vec{k}_1]$$

$$\Rightarrow dE_p(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) = mgdz_1$$

$$\Rightarrow E_p(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) = mgz_1 + cte$$

$$\Rightarrow E_p(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) = mgR \sin(\theta) + cte$$

Alors l'énergie potentielle de M par rapport au repère \mathfrak{R}_1 est :

$$\Rightarrow E_p(M / \mathfrak{R}_1) = maR \sin(\theta) + mgR \sin(\theta) + cte$$

$$A t = 0 : \theta = 0 \text{ et } E_p(M / \mathfrak{R}_1) = 0 \Rightarrow cte = 0$$

$$\Rightarrow E_p(M / \mathfrak{R}_1) = mR \sin(\theta)(a + g)$$

5. Energie cinétique de M par rapport au repère \mathfrak{R}_1 :

$$E_c(M / \mathfrak{R}_1) = \frac{1}{2} m \vec{v}^2(M / \mathfrak{R}_1) = \frac{1}{2} m \|\vec{v}(M / \mathfrak{R}_1)\|^2$$

$$\Rightarrow E_c(M / \mathfrak{R}_1) = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2$$

6. Théorème de la quantité de mouvement dans le repère \mathfrak{R}_1 :

$$\mathfrak{R}_1 \text{ est non Galiléen} \Rightarrow m\vec{\gamma}(M / \mathfrak{R}_1) = \sum \vec{F}_{ext} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{P} + \vec{R} \text{ où } \vec{R} = R_\rho \vec{e}_\rho + R_\theta \vec{e}_\theta + R_z \vec{e}_z$$

N.B : On exprime la réaction \vec{R} dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ pour faire apparaître sa composante tangentielle (tangente à la trajectoire).

Mouvement sans frottement \Rightarrow la composante tangentielle de la réaction est nulle c'est-à-dire $R_\theta = 0 \Rightarrow \vec{R} = R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z$

P.F.D dans \mathfrak{R}_1 s'écrit donc :

$$mR\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - mR\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho = -mg \sin(\theta)\vec{e}_\rho - mg \cos(\theta)\vec{e}_\theta + R_\rho\vec{e}_\rho + R_z\vec{e}_z - ma \sin(\theta)\vec{e}_\rho - ma \cos(\theta)\vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow (mR\ddot{\theta} + mg \cos(\theta) + ma \cos(\theta))\vec{e}_\theta + (mg \sin(\theta) + ma \sin(\theta) - R_\rho - mR\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho - R_z\vec{e}_z = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mR\ddot{\theta} + mg \cos(\theta) + ma \cos(\theta) = 0 \\ mg \sin(\theta) + ma \sin(\theta) - R_\rho - mR\dot{\theta}^2 = 0 \\ R_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta} = -\frac{g+a}{R} \cos(\theta) \\ R_\rho = m \sin(\theta)(g+a) - mR\dot{\theta}^2 \\ R_z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Equation différentielle du second ordre en } t \text{ vérifiée par } \theta : \ddot{\theta} = -\frac{g+a}{R} \cos(\theta)$$

$$\text{Réaction } \vec{R} \text{ exercée sur } M \text{ par le cerceau : } \vec{R} = m(\sin(\theta)(g+a) - R\dot{\theta}^2)\vec{e}_\rho$$

7. Théorème de l'énergie cinétique dans le repère \mathfrak{R}_1 :

$$\mathfrak{R}_1 \text{ est non galiléen} \Rightarrow dE_c(M/\mathfrak{R}_1) = dW(\sum \vec{F}_{ext} / \mathfrak{R}_1) + dW(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1)$$

$$(dW(\vec{F}_c / \mathfrak{R}_1) = 0 \text{ voir le cours})$$

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_{\text{ext}} &= \vec{P} + \vec{R} \text{ avec } \vec{R} = R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z \\ \Rightarrow dE_c(M/\mathfrak{R}_1) &= dW(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) + dW(\vec{R} / \mathfrak{R}_1) + dW(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) \\ \Rightarrow \frac{dE_c(M/\mathfrak{R}_1)}{dt} &= \frac{dW(\vec{P} / \mathfrak{R}_1)}{dt} + \frac{dW(\vec{R} / \mathfrak{R}_1)}{dt} + \frac{dW(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1)}{dt} \\ \Rightarrow \frac{dE_c(M/\mathfrak{R}_1)}{dt} &= P(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) + P(\vec{R} / \mathfrak{R}_1) + P(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) \quad (P : \text{puissance}) \end{aligned}$$

$$\frac{dE_c(M/\mathfrak{R}_1)}{dt} = mR^2 \ddot{\theta}$$

$$P(\vec{P} / \mathfrak{R}_1) = \vec{P} \vec{v}(M / \mathfrak{R}_1) = (-mg \sin(\theta) \vec{e}_\rho - mg \cos(\theta) \vec{e}_\theta) R \dot{\theta} \vec{e}_\theta = -mg \cos(\theta) R \dot{\theta}$$

$$P(\vec{R} / \mathfrak{R}_1) = \vec{R} \vec{v}(M / \mathfrak{R}_1) = (R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z) R \dot{\theta} \vec{e}_\theta = 0$$

$$P(\vec{F}_e / \mathfrak{R}_1) = \vec{F}_e \vec{v}(M / \mathfrak{R}_1) = (-ma \sin(\theta) \vec{e}_\rho - ma \cos(\theta) \vec{e}_\theta) R \dot{\theta} \vec{e}_\theta = -ma \cos(\theta) R \dot{\theta}$$

$$\Rightarrow mR^2 \ddot{\theta} = -mg \cos(\theta) R \dot{\theta} - ma \cos(\theta) R \dot{\theta} \Rightarrow R \ddot{\theta} = -g \cos(\theta) - a \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \text{On retrouve l'équation différentielle du mouvement : } \ddot{\theta} = -\frac{g+a}{R} \cos(\theta)$$

8. Théorème de l'énergie mécanique dans le repère \mathfrak{R}_1 :

$$\mathfrak{R}_1 \text{ est non galiléen et } \vec{F}_e \text{ est conservative dans } \mathfrak{R}_1 \Rightarrow dE_m(M/\mathfrak{R}_1) = dW(\vec{F}_{ncon} / \mathfrak{R}_1)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m(M/\mathfrak{R}_1)}{dt} = \frac{dW(\vec{F}_{ncon} / \mathfrak{R}_1)}{dt} = P(\vec{F}_{ncon} / \mathfrak{R}_1)$$

$$E_m(M/\mathfrak{R}_1) = E_c(M/\mathfrak{R}_1) + E_p(M/\mathfrak{R}_1) = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + mR \sin(\theta)(a + g)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m(M/\mathfrak{R}_1)}{dt} = mR^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mR(a + g) \dot{\theta} \cos(\theta)$$

$$\vec{F}_{ncon} = \vec{R} \Rightarrow P(\vec{F}_{ncon} / \mathfrak{R}_1) = P(\vec{R} / \mathfrak{R}_1) = \vec{R} \vec{v}(M / \mathfrak{R}_1) = 0$$

$$\Rightarrow mR^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} + mR(a + g) \dot{\theta} \cos(\theta) \Rightarrow R \ddot{\theta} + (a + g) \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \text{On retrouve l'équation différentielle du mouvement : } \ddot{\theta} = -\frac{g+a}{R} \cos(\theta)$$

9. Théorème du moment cinétique dans le repère \mathfrak{R}_1 :

$$\mathfrak{R}_1 \text{ est non Galiléen et } O_1 \text{ est fixe dans } \mathfrak{R}_1 \Rightarrow$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1)}{dt / \mathfrak{R}_1} = \vec{m}_{O_1}(\sum \vec{F}_{\text{ext}}) + \vec{m}_{O_1}(\vec{F}_e) + \vec{m}_{O_1}(\vec{F}_c)$$

$$\frac{d\vec{\sigma}_{O_1}(M/R_1)}{dt / \mathfrak{R}_1} = mR^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z$$

$$\vec{m}_{O_1}(\sum \vec{F}_{\text{ext}}) = \vec{m}_{O_1}(\vec{P}) + \vec{m}_{O_1}(\vec{R}) = \vec{O}_1 \vec{M} \wedge \vec{P} + \vec{O}_1 \vec{M} \wedge \vec{R}$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{P}) = \vec{O}_1 \vec{M} \wedge \vec{P} = R \vec{e}_\rho \wedge (-mg \sin(\theta) \vec{e}_\rho - mg \cos(\theta) \vec{e}_\theta) = -Rmg \cos(\theta) \vec{e}_z$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{R}) = \vec{O}_1 \vec{M} \wedge \vec{R} = R \vec{e}_\rho \wedge (R_\rho \vec{e}_\rho + R_z \vec{e}_z) = -RR_z \vec{e}_\theta$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{F}_e) = \vec{O}_1 \vec{M} \wedge \vec{F}_e = R \vec{e}_\rho \wedge (-ma \sin(\theta) \vec{e}_\rho - ma \cos(\theta) \vec{e}_\theta) = -Rma \cos(\theta) \vec{e}_z$$

$$\vec{m}_{O_1}(\vec{F}_c) = \vec{O}_1 \vec{M} \wedge \vec{F}_c = \vec{0}$$

$$\Rightarrow mR^2 \ddot{\theta} \vec{e}_z = -Rmg \cos(\theta) \vec{e}_z - RR_z \vec{e}_\theta - Rma \cos(\theta) \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow (mR^2 \ddot{\theta} + Rmg \cos(\theta) + Rma \cos(\theta)) \vec{e}_z + RR_z \vec{e}_\theta = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} mR^2 \ddot{\theta} + Rmg \cos(\theta) + Rma \cos(\theta) = 0 \\ RR_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R \ddot{\theta} + g \cos(\theta) + a \cos(\theta) = 0 \\ R_z = 0 \end{cases}$$

⇒ On retrouve l'équation différentielle du mouvement : $\ddot{\theta} = -\frac{g+a}{R} \cos(\theta)$

Exercice 3

1. Application du théorème de l'énergie mécanique dans le repère \mathcal{R} :

Vecteurs vitesse et accélération du point M par rapport au repère \mathcal{R} :

$$-\vec{v}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{OM}}{dt/\mathcal{R}} = \frac{d(\rho\vec{e}_\rho)}{dt/\mathcal{R}} \Rightarrow \vec{v}(M/\mathcal{R}) = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi$$

$$-\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\vec{v}(M/\mathcal{R})}{dt/\mathcal{R}} = \frac{d(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi)}{dt/\mathcal{R}} \Rightarrow \vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi$$

Energies mécanique de M par rapport au repère \mathcal{R} :

$$- E_c(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m \vec{v}(M/\mathcal{R})^2 \Rightarrow E_c(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m \rho^2 \omega^2$$

$$- dE_{pg} = -\vec{P}d\vec{OM} = mg\vec{e}_z(d\rho\vec{e}_\rho + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{e}_z) = mgdz, \quad dz = 0 \rightarrow E_{pg} = Cte \Rightarrow E_p(M/\mathcal{R}) = Cte$$

$$E_m(M/\mathcal{R}) = E_c(M/\mathcal{R}) + E_p(M/\mathcal{R}) \Rightarrow E_m(M/\mathcal{R}) = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m \rho^2 \omega^2 + Cte$$

Application du théorème de l'énergie mécanique dans le repère \mathcal{R} :

$$\frac{dE_m(M/\mathcal{R})}{dt} = P(\vec{F}_{ncon}/\mathcal{R}), \quad P(\vec{F}_{ncon}/\mathcal{R}) = P(\vec{R}/\mathcal{R}) = \vec{R}\vec{v}(M/\mathcal{R}) = (R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z)(\dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\omega\vec{e}_\varphi) = R_\varphi\rho\omega$$

$$\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z, \text{ mouvement sans frottement} \rightarrow R_\rho = 0 \rightarrow \vec{R} = R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z$$

$$\text{Théorème du moment cinétique ou P.F.D} \Rightarrow R_\varphi = 2m\dot{\rho}\omega \text{ et } R_z = mg \Rightarrow P(\vec{F}_{ncon}/\mathcal{R}) = 2m\rho\dot{\rho}\omega^2$$

$$\frac{dE_m(M/\mathcal{R}_1)}{dt} = \frac{d\left(\frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 + \frac{1}{2} m \rho^2 \omega^2 + Cte\right)}{dt} = m\rho\ddot{\rho} + m\omega^2\rho\dot{\rho}$$

$$\rightarrow m\rho\ddot{\rho} + m\omega^2\rho\dot{\rho} = 2m\rho\dot{\rho}\omega^2 \rightarrow \ddot{\rho} + \omega^2\rho = 2\rho\omega^2 \Rightarrow \ddot{\rho} - \omega^2\rho = 0$$

La solution de cette équation est sous la forme : $\rho(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$

$$\rho(t=0) = \rho_0 \text{ et } \dot{\rho}(t=0) = 0 \rightarrow A + B = \rho_0 \text{ et } A\omega - B\omega = 0 \rightarrow A = B = \frac{\rho_0}{2} \rightarrow \rho(t) = \frac{\rho_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$$

$$\Rightarrow \rho(t) = \rho_0 \cosh(\omega t)$$

2. Application du principe fondamental de dynamique dans \mathcal{R} :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} = m\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$$

$$\vec{R} = R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z \text{ (réaction de la tige sur M), } \vec{P} = -mg\vec{e}_z \text{ (poids de M)}$$

$$\vec{F} = -k(\rho - \rho_0)\vec{e}_\rho : \text{force de rappel (force appliquée par le ressort sur M)} (d\ell = \rho - \rho_0)$$

$$\rightarrow -mg\vec{e}_z + R_\varphi\vec{e}_\varphi + R_z\vec{e}_z - k(\rho - \rho_0)\vec{e}_\rho = m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)\vec{e}_\rho + 2m\dot{\rho}\omega\vec{e}_\varphi$$

$$\rightarrow R_\varphi = 2m\dot{\rho}\omega \text{ et } R_z = mg \text{ et } -k(\rho - \rho_0) = m(\ddot{\rho} - \rho\omega^2)$$

$$\Rightarrow \ddot{\rho} + \left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)\rho = \frac{k}{m}\rho_0 : \text{la nouvelle équation différentielle du mouvement de l'anneau lors de}$$

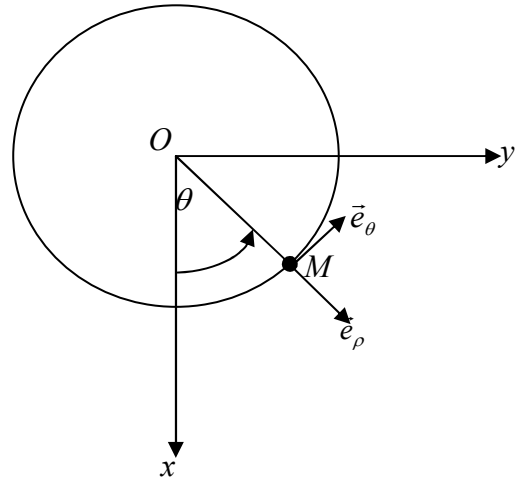
la rotation de la tige lorsque M soumis à une force de rappel par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k, de masse négligeable et de longueur à vide ρ_0 .

Série N° 5
Stabilité et conditions de stabilité d'un équilibre

Exercice 1

Soit une particule M de masse m en mouvement, dans le plan xOy (plan vertical), sans frottement sur un cerceau (C) de rayon R et de centre O . La position de M est définie par l'angle θ (voir figure ci-dessous).

1. Calculer l'énergie potentielle de M dans le repère $\mathcal{R}(O, x, y, z)$ (on suppose que $E_p(\theta = 0) = 0$).
2. Déterminer les positions d'équilibre de M .
3. Etudier leur stabilité.



Exercice 2

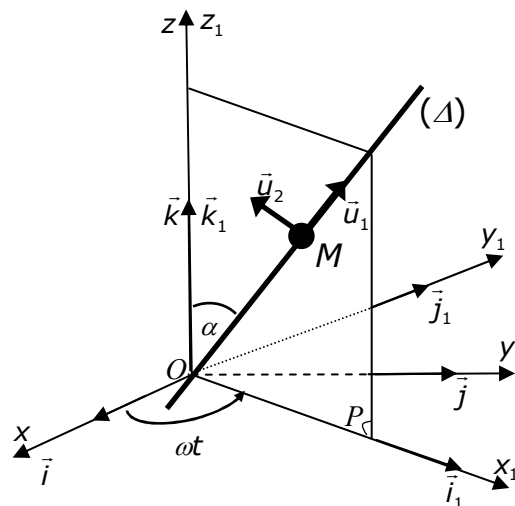
On considère le repère fixe $R(Oxyz)$ (repère absolu) muni de la base O.N.D $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, (xOy) étant le plan horizontal. Soit (P) un plan vertical qui tourne autour de (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω . On désigne par $R_1(Ox_1y_1z_1)$ le repère relatif muni de la base O.N.D $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ tel que (x_1Oz_1) se trouve constamment dans le plan (P) et $\vec{k} = \vec{k}_1$ (voir la figure ci-dessous).

Soit (Δ) une tige de longueur L (de vecteur directeur unitaire \vec{u}_1) passant par O , constamment contenue dans le plan (P) et faisant un angle α constant avec l'axe (Oz_1) ($0 < \alpha < \pi/2$).

Un anneau M de masse m (assimilé à un point matériel) se meut sans frottement le long de la tige (Δ). La position de M sur la tige est définie par : $\vec{OM} = r(t)\vec{u}_1$.

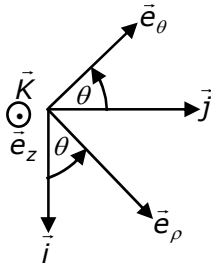
Soient \vec{u}_2 un vecteur unitaire, contenu dans le plan (P) et perpendiculaire à \vec{u}_1 , et \vec{u}_3 un vecteur unitaire tel que la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3)$ soit O.N.D.

1. Exprimer dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, le poids de M et les forces d'inertie.
2. Calculer, en fonction de r , l'énergie potentielle de M par rapport au repère R_1 .
3. Montrer qu'il ne peut exister une position d'équilibre relatif r_{eq} de l'anneau sur la tige que si la vitesse angulaire ω est supérieure à une valeur limite ω_0 que l'on déterminera.
4. Déterminer la position d'équilibre relatif r_1 de l'anneau sur la tige pour une vitesse angulaire $\omega_1 \geq \omega_0$.
5. Etudier la stabilité de l'équilibre relatif.



Solution série N° 5
Stabilité et conditions de stabilité d'un équilibre

Exercice 1



$$\vec{e}_\rho = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$$

$$\vec{e}_\theta = -\sin(\theta)\vec{i} + \cos(\theta)\vec{j}$$

$$\vec{e}_z = \vec{k}$$

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt / \mathfrak{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta, \quad \frac{d\vec{e}_\theta}{dt / \mathfrak{R}} = -\dot{\theta}\vec{e}_\rho, \quad \frac{d\vec{e}_z}{dt / \mathfrak{R}} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{i} = \cos(\theta)\vec{e}_\rho - \sin(\theta)\vec{e}_\theta, \quad \vec{j} = \sin(\theta)\vec{e}_\rho + \cos(\theta)\vec{e}_\theta, \quad \vec{k} = \vec{e}_z$$

$$\mathfrak{R}'(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z), \quad \mathfrak{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \Rightarrow \vec{\Omega}(\mathfrak{R}' / \mathfrak{R}) = \dot{\theta}\vec{k} = \dot{\theta}\vec{e}_z$$

$$\vec{OM} = R\vec{e}_\rho \Rightarrow \vec{v}(M / \mathfrak{R}) = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{\gamma}(M / \mathfrak{R}) = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_\rho$$

Bilan des forces :

Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{i} = mg \cos(\theta)\vec{e}_\rho - mg \sin(\theta)\vec{e}_\theta$

Réaction : $\vec{R} = R_\rho\vec{e}_\rho + R_\theta\vec{e}_\theta + R_z\vec{e}_z = R_\rho\vec{e}_\rho + R_z\vec{e}_z$ (mouvement sans frottement $\Rightarrow R_\theta = 0$)

1. Energie potentielle de M par rapport au repère \mathfrak{R} :

On a $E_p(M / \mathfrak{R}) = E_p(\vec{P} / \mathfrak{R})$

$$dE_p(M / \mathfrak{R}) = dE_p(\vec{P} / \mathfrak{R}) = -dW(\vec{P} / \mathfrak{R}) = -\vec{P}d\vec{OM} = -mg\vec{i}(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$\Rightarrow dE_p(M / \mathfrak{R}) = -mgdx \Rightarrow E_p(M / \mathfrak{R}) = -mgx + cte$$

$$x = R\cos(\theta) \Rightarrow E_p(M / \mathfrak{R}) = -mgR \cos(\theta) + cte$$

$$E_p(\theta = 0) = 0 \Rightarrow cte = mgR$$

$$\Rightarrow E_p(M / \mathfrak{R}) = mgR(1 - \cos(\theta))$$

2. Positions d'équilibre de M :

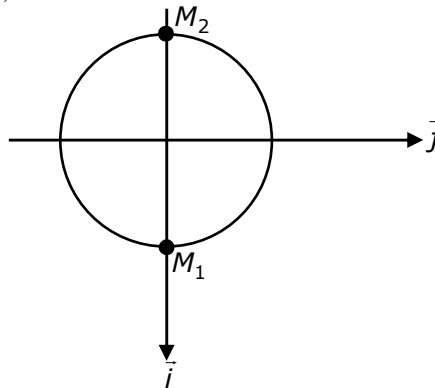
Une position d'équilibre est une position où l'énergie potentielle est optimale (maximale ou minimale). C'est-à-dire à cette position on aura :

$$\frac{dE_p}{d\theta} = 0 \quad (E_p(M / \mathfrak{R}) = E_p(\theta))$$

$$\frac{dE_p}{d\theta} = mgR \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \sin(\theta) = 0 \Rightarrow \theta = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

\Rightarrow Sur la trajectoire circulaire de M, on a deux positions d'équilibre qui correspondent aux valeurs $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

\Rightarrow Les positions d'équilibre sont : $M_1(\rho = R, \theta = 0)$ et $M_2(\rho = R, \theta = \pi)$ en coordonnées polaires ou $M_1(R, 0)$ et $M_2(-R, 0)$ en coordonnées cartésiennes.



3. Etude de la stabilité des positions d'équilibre :

Pour étudier la stabilité, on détermine le signe de la dérivée seconde de la fonction $E_p(\theta)$ par rapport à θ en ces deux positions d'équilibre M_1 et M_2 .

$$\frac{d^2 E_p}{d\theta^2} = mgR \cos(\theta)$$

$\Rightarrow \left. \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} \right|_{\theta=0} = mgR > 0 \Rightarrow$ L'énergie potentielle est minimale en $M_1 \Rightarrow M_1$ est une position d'équilibre stable.

$\Rightarrow \left. \frac{d^2 E_p}{d\theta^2} \right|_{\theta=\pi} = -mgR < 0 \Rightarrow$ L'énergie potentielle est maximale en $M_2 \Rightarrow M_2$ est une position d'équilibre instable.

Exercice 2

1. le poids de M et les forces d'inertie :

$$- \vec{P} = -mg\vec{k}_1$$

$$- \vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e, \vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O/R) + \frac{d\vec{\Omega}(R_1/R)}{dt/R} \wedge \vec{OM} + \vec{\Omega}(R_1/R) \wedge [\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{OM}] = -r\omega^2 \sin(\alpha)\vec{j}_1$$

$$\vec{\Omega}(R_1/R) = \omega\vec{k}_1 \quad \Rightarrow \vec{F}_e = mr\omega^2 \sin(\alpha)\vec{j}_1$$

$$- \vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c, \vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}(R_1/R) \wedge \vec{v}(M/R_1) = 2\omega\dot{r} \sin(\alpha)\vec{j}_1 \Rightarrow \vec{F}_c = -2m\omega\dot{r} \sin(\alpha)\vec{j}_1$$

2. Energie potentielle de M par rapport au repère R_1 , en fonction de r :

$$x_1 = r \sin(\alpha) \rightarrow \vec{F}_e = m\omega^2 x_1 \vec{j}_1 \rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} \vec{F}_e = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_e \rightarrow E_{pe}$$

$$dE_{pe} = -dw(\vec{F}_e/R_1) = -\vec{F}_e d\vec{OM} = -m\omega^2 x_1 \vec{j}_1 (dx_1 \vec{i}_1 + dy_1 \vec{j}_1 + dz_1 \vec{k}_1) = -m\omega^2 x_1 dx_1$$

$$\rightarrow E_{pe} = -\frac{1}{2} m\omega^2 x_1^2 + \text{Cte} \Rightarrow E_{pe} = -\frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \sin^2(\alpha) + \text{Cte}$$

$$dE_{pg} = -dw(\vec{P}/R_1) = -\vec{P} d\vec{OM} = mg\vec{k}_1 (dx_1 \vec{i}_1 + dy_1 \vec{j}_1 + dz_1 \vec{k}_1) = mgdz_1$$

$$\rightarrow E_{pg} = mgz_1 + \text{Cte}, z_1 = r \cos(\alpha) \Rightarrow E_{pg} = mgr \cos(\alpha) + \text{Cte}$$

$$\Rightarrow E_p(M/R_1) = mgr \cos(\alpha) - \frac{1}{2} m\omega^2 r^2 \sin^2(\alpha) + \text{Cte}$$

3. si r_{eq} est une position d'équilibre, on aura : $\left. \frac{dE_p(M/R_1)}{dr} \right|_{r=r_{eq}} = 0$

$$\rightarrow g \cos(\alpha) - \omega^2 r_{eq} \sin^2(\alpha) = 0 \rightarrow r_{eq} = \frac{g \cos(\alpha)}{\omega^2 \sin^2(\alpha)}$$

$$r_{eq} \leq L \rightarrow \frac{g \cos(\alpha)}{\omega^2 \sin^2(\alpha)} \leq L \rightarrow \omega \geq \sqrt{\frac{g \cos(\alpha)}{L \sin^2(\alpha)}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g \cos(\alpha)}{L \sin^2(\alpha)}}$$

4. la position d'équilibre r_1 pour une vitesse angulaire $\omega_1 \geq \omega_0$ est : $r_1 = \frac{g \cos(\alpha)}{\omega_1^2 \sin^2(\alpha)}$

$$5. \frac{dE_p(M/R_1)}{dr} = mg \cos(\alpha) - m\omega^2 r \sin^2(\alpha) \rightarrow \frac{d^2 E_p(M/R_1)}{dr^2} = -m\omega^2 \sin^2(\alpha) < 0$$

\Rightarrow l'équilibre est instable quelque soit r_{eq} .