UNIVERSITE HASSAN II DE CASABLANCA
Faculté des Sciences Aïn Chock – Casablanca

Année universitaire 2020-2021
Filière SMPC
Module : Mécanique 1

Session 1 : Durée 1h 30 mn

Exercice 1 : Courbe en coordonnées cartésiennes

Soit $\mathcal{R}(o;x,y,z)$ un référentiel muni de la base ortho normée directe$(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Un point matériel M mobile dans le plan (xOy), décrit **dans le sens positif** la courbe $(\mathcal{C})$ définie en coordonnées cartésiennes par :

$$x(t) = 1 + t\,,\quad y(t) = (t^2 - 1)\,,\quad z(t) = 0.$$

1 - Déterminer l'équation de la trajectoire du point M, en déduire sa nature. Dessiner l'allure de la trajectoire.

2 - Calculer à l'instant t le vecteur vitesse $\vec{V}(M/_{\mathcal{R}})$ et son module $\|\vec{V}(M/_{\mathcal{R}})\|$.

3 - En déduire le vecteur tangent $\vec{\tau}(M/_{\mathcal{R}})$ et normal $\vec{n}(M/_{\mathcal{R}})$.

4- Calculer à l'instant t le vecteur accélération $\vec{a}(M/_{\mathcal{R}})$, l'accélération tangentielle a_t et normale a_n. En déduire le rayon de courbure R_C.

Exercice 2 : Courbe en coordonnées polaires

Un point matériel M décrit **dans le sens positif**, dans le plan (xOy) d'un référentiel $\mathcal{R}(O,x,y,z)$ de base $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ la courbe $\mathcal{C}$ définie en coordonnées polaires habituelles par :

$$r = r_0 e^{-\theta}$$

Où $r(t) = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\theta(t) = (\widehat{\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}})$ aux quelles on associe la base polaire $\mathcal{B}(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$.
$\vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$ et $(\widehat{\vec{e}_r,\vec{e}_\theta}) = \frac{\pi}{2}$. **Tous les résultats vectoriels doivent être exprimés dans la base $\mathcal{B}(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$.**

1 – Calculer $\vec{V}(M/_{\mathcal{R}})$ et $\|\vec{V}(M/_{\mathcal{R}})\|$ en fonction de r_0, θ et $\dot{\theta}$. En déduire les $\vec{\tau}(M/_{\mathcal{R}})$ et $\vec{n}(M/_{\mathcal{R}})$.

2 - Calculer le rayon de courbure R_C

3 – Calculer l'abscisse curviligne $s(\theta)$, on prendra $s(0) = 0$.

4 – Calculer $\vec{a}(M/_{\mathcal{R}})$ en fonction de r_0, θ et $\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$.

Exercice 3 : Composition de mouvements

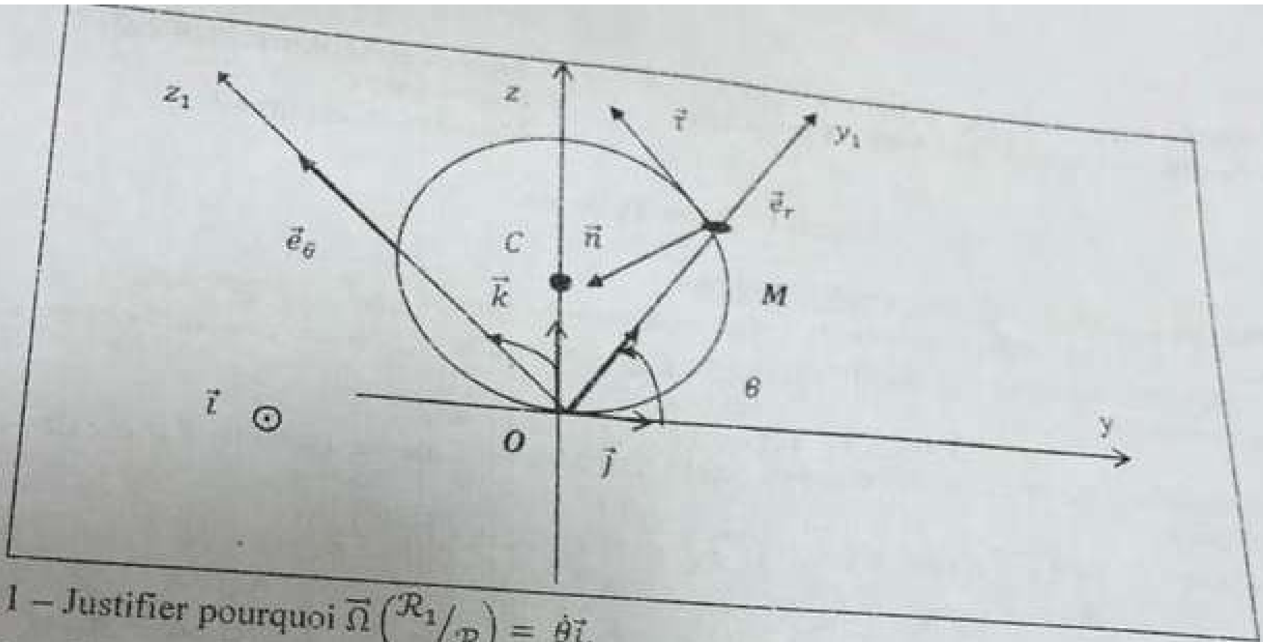
Soient $\mathcal{R}(o;x,y,z)$ **le référentiel absolu** d'origine le point O muni de la base orthonormée directe $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$et $\mathcal{R}_1(O;x_1,y_1,z_1)$ **un référentiel relatif** d'origine le point O muni de la base orthonormée directe $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{\imath})$, Au cours du temps les axes (Ox) et (Ox_1) restent colinéaires. Dans le plan vertical (yOz), un point matériel M, décrit le cercle de centre $C(0,0,a)$ et de rayon a d'équation :

$$r = 2a\sin\theta$$

où $r(t) = \|\overrightarrow{OM}\|$ et $\theta(t) = (\widehat{\vec{\jmath},\overrightarrow{OM}})$ fonctions du temps t, tel que : $\overrightarrow{OM} = 2a\sin\theta\,\vec{e}_r$ (voir figure). $\dot{\theta}(t)$ est une fonction croissante du temps t.

Tous les résultats vectoriels doivent être exprimés dans la base $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{\imath})$.

Tournez la page S.V.P



1 – Justifier pourquoi $\vec{\Omega}\left({}^{\mathcal{R}_1}/_{\mathcal{R}}\right) = \dot{\theta}\vec{\imath}$.

2 – Calculer $\vec{V}_r(M)$, $\vec{V}_e(M)$ respectivement les vitesses relative et d'entrainement en déduire $\vec{V}_a(M)$ la vitesse absolue.

3- Calculer l'accélération relative $\vec{a}_r(M) = \vec{a}\left({}^{M}/_{\mathcal{R}_1}\right)$, d'entrainement $\vec{a}_e(M) = \vec{a}(M \in \mathcal{R}_1/\mathcal{R})$ et de Coriolis $\vec{a}_C(M)$. En déduire l'accélération absolue $\vec{a}_a(M) = \vec{a}\left({}^{M}/_{\mathcal{R}}\right)$.

4 – Retrouver les vecteurs vitesse absolue $\vec{V}_a(M)$ et accélération absolue $\vec{a}\left({}^{M}/_{\mathcal{R}}\right)$ par le calcul direct.

Exam Mecanique 2020/2021

Ex 1 :

$x(t) = 1+t \qquad y(t) = (t^2-1) \quad . \quad z(t) = 0$

1- détermination déquation de la trajectoire

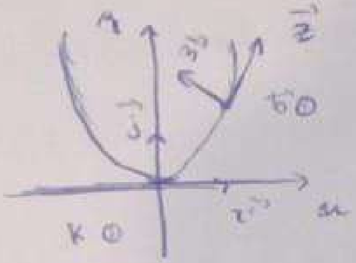
on a $x = 1+t \Rightarrow t = x-1$

on replace t dans y on trouve

① $y = (x-1)^2 - 1 = x^2 - 2x$

$y = x^2 - 2x$ la nature c'est parabole

l'allure



2- calcul le vecteur viteese $\vec{V}(M/R)$ et son module

$x = t+1$

$\dot{x} = 1$

$y = t^2 - 1$

$\dot{y} = 2t$

$\vec{V}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big/_R = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} = \vec{i} + 2t\vec{j}$

$\|\vec{V}(M/R)\| = \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} = \sqrt{1+4t^2}$

$(\vec{i}$ et $\vec{j})$ et fixe dans le Repere R

3- Vecteur tangent $\vec{z}(M/R)$ et normal $\vec{n}(M/R)$

$\vec{z} = \frac{\vec{V}(M/R)}{\|\vec{V}(M/R)\|} = \frac{\vec{i}+2t\vec{j}}{\sqrt{1+4t^2}}$

$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{z}$ on a $\vec{b} = \vec{K}$ voir la figure

$\vec{n} = \vec{K} \wedge \vec{z} = \vec{K} \wedge \frac{\vec{i}+2t\vec{j}}{\sqrt{1+4t^2}} = \frac{\vec{j}-2t\vec{i}}{\sqrt{1+4t^2}}$

4- calcul d'accélération $\vec{a}(M/R)$

$\ddot{x} = 0$

$\ddot{y} = 2$

$\vec{a}(M/R) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\Big/_R = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = 2\vec{j}$

$\vec{a}(M/R) = a_t\vec{z} + a_n\vec{n}$

$\vec{a}_t = \vec{a}(M/R)\cdot\vec{z}$

$= 2\vec{j} \cdot \frac{\vec{i}+2t\vec{j}}{\sqrt{1+4t^2}} =$

$a_t = \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$

$$a_m = \vec{a}(M/R) \cdot \vec{n} = 2\vec{j} \cdot \left(\frac{\vec{j} - 2t\vec{i}}{\sqrt{1+4t^2}}\right)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$$

calcul R_c

$$a_m = \frac{(\vec{V}(M/R))^2}{R_c} \Rightarrow R_c = \frac{\|V(M/R)\|^2}{\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}} = \frac{\sqrt{1+4t^2}^2 \cdot \sqrt{1+4t^2}}{2}$$

②

$$R_c = \frac{(1+4t^2)^{3/2}}{2}$$

Ex2 :

$$\vec{OM} = r\vec{e_r} \qquad r = r_0 e^{-\theta}$$

$R(O, x, y, z)$
$R_1(O, x_1, y_1, z)$

1- calculer $\vec{V}(M/R)$ et $\|\vec{V}(M/R)\|$

$$\vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right/_R = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} \qquad \dot{r} = -r_0\dot{\theta}e^{-\theta}$$

$$\left\{ \left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right/_R = \dot{\theta}\vec{e_\theta} \right.$$ car $\vec{e_r} \in R_1$

$$= -r_0\dot{\theta}e^{-\theta}\vec{e_r} + r_0\dot{\theta}e^{-\theta}\vec{e_\theta} = r_0\dot{\theta}e^{-\theta}(\vec{e_\theta} - \vec{e_r})$$

$$\|\vec{V}(M/R)\| = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} = r_0\dot{\theta}e^{-\theta}\sqrt{2}$$

calcul vecteur $\vec{\tau}$ et $\vec{n}$

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{V}(M/R)}{\|\vec{V}(M/R)\|} = \frac{\cancel{r_0\dot{\theta}e^{-\theta}}(\vec{e_\theta} - \vec{e_r})}{\cancel{r_0\dot{\theta}e^{-\theta}}\sqrt{2}} = \frac{\vec{e_\theta} - \vec{e_r}}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau} \qquad \vec{b} = \vec{k}$$

on a le point M dans le plan (xoy) et de le sens positif

$$= \vec{k} \wedge \vec{\tau} = \vec{k} \wedge \frac{(\vec{e_\theta} - \vec{e_r})}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{n} = \frac{(-\vec{e_r} - \vec{e_\theta})}{\sqrt{2}}$$

calcul de R_c

On a

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \vec{n}\,\frac{d\theta}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \vec{n}\,\frac{d\theta}{R_c d\theta}\,\|\vec{V}(M/R)\|$$

$$\vec{n} = \frac{d\vec{\tau}}{d\theta}$$
$$ds = R_c d\theta$$
$$\dot{s} = \frac{ds}{dt} = \|\vec{V}(M/R)\|$$
$$\vec{n} = \frac{\frac{d\vec{\tau}}{dt}}{\|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\|}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{\vec{n}}{R_c}\|\vec{V}(M/R)\| = \frac{d\vec{\tau}}{dt}\,\frac{\|\vec{V}(M/R)\|}{R_c\,\|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\|}$$

donc on trouve finalement

$$R_c = \frac{\|\vec{V}(M/R)\|}{\|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\|} = \frac{r_0\dot{\theta}e^{-\theta}\sqrt{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}(-\dot{\theta}\vec{e_\theta} - \dot{\theta}\vec{e_r})} = \frac{2r_0\dot{\theta}e^{-\theta}}{\dot{\theta}\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,r_0 e^{-\theta}$$

Ex3 :

$R(O\vec{i}\vec{j}\vec{k})$ absolu

$R_1(O\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{k})$ relatif

$\vec{OM} = r\vec{e_r} = 2a\sin\theta\,\vec{e_r}$

③

1- on a

$\left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right|_R = \dot{\theta}\vec{e_\theta} = \dot{\theta}\,\vec{i}\wedge\vec{e_r}$

$\left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right|_R = \cancel{\left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right|_{R_1}}^{0} + \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{e_r} = \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{e_r}$

$\vec{e_r}$ est fixe dans R_1 donc $\left.\frac{d\vec{e_r}}{dt}\right|_{R_1} = 0$

Alors $\vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\theta}\,\vec{i}$

2-

$\vec{V_r} = \vec{V}(M/R_1) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_{R_1} = \dot{r}\vec{e_r} = 2a\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e_r}$ $\quad (O = O_1)$

$\vec{V_e} = \cancel{\frac{d\vec{OO_1}}{dt}}_{0} + \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{OM} = \dot{\theta}\vec{i}\wedge r\vec{e_r}$

$\vec{OO_1} = \vec{0}$

$\boxed{\begin{array}{l} r = 2a\sin\theta \\ \dot{r} = 2a\dot{\theta}\cos\theta \\ \ddot{r} = 2a(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta) \end{array}}$

$\vec{V_e} = \dot{\theta}r\vec{e_\theta} = 2\dot{\theta}a\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

$\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e} = 2a\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e_r} + 2a\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

$= 2a\dot{\theta}(\cos\theta\,\vec{e_r} + \sin\theta\,\vec{e_\theta})$

3- $\vec{a_r} = \vec{a}(M/R_1) = \left.\frac{d\vec{V_r}}{dt}\right|_{R_1} = \ddot{r}\vec{e_r} = 2a(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\,\vec{e_r}$

$\vec{a_c} = 2\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{V_r} = 2\dot{\theta}\vec{i}\wedge\dot{r}\vec{e_r} = 2\dot{\theta}\dot{r}\,\vec{e_\theta}$

$\vec{a_c} = 2\dot{\theta}\cdot 2a\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e_\theta} = 4a\dot{\theta}^2\cos\theta\,\vec{e_\theta}$

$\vec{a_e} = \cancel{\vec{a}(O_1/R)}_{0} + \dot{\vec{\Omega}}(R_1/R)\wedge\vec{OM} + \vec{\Omega}(R_1/R)\wedge(\vec{\Omega}(R_1/R)\wedge\vec{OM})$

$= \ddot{\theta}\vec{i}\wedge r\vec{e_r} + \dot{\theta}\vec{i}\wedge(\dot{\theta}\vec{i}\wedge r\vec{e_r}) = \ddot{\theta}r\vec{e_\theta} + \dot{\theta}\vec{i}\wedge\dot{\theta}r\vec{e_\theta}$

$= \ddot{\theta}r\vec{e_\theta} + \dot{\theta}^2r(-\vec{e_r}) = \ddot{\theta}2a\sin\theta\,\vec{e_\theta} - \dot{\theta}^2 2a\sin\theta\,\vec{e_r}$

$\vec{a_a} = \vec{a_r} + \vec{a_c} + \vec{a_e} = (2a\ddot{\theta}\cos\theta - 2a\dot{\theta}^2\sin\theta - \dot{\theta}^2 2a\sin\theta)\vec{e_r} + (4a\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}2a\sin\theta)\vec{e_\theta}$

$a_a = (2a\ddot{\theta}\cos\theta - 4a\dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{e_r} + (4a\dot{\theta}^2\cos\theta + \ddot{\theta}2a\sin\theta)\vec{e_\theta}$

4

$\vec{V_a} = \vec{V}(M/R) = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_R = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta} = 2a\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e_r} + 2a\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e_\theta}$

$$\vec{a}(M/R_0) = a_a = \left.\frac{d\vec{V_a}}{dt}\right|_{R} = \ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} - r\dot{\theta}^2\vec{e_r}$$

(4)

$$= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e_\theta}$$

$$= (2a\ddot{\theta}\cos\theta - 2a\dot{\theta}^2\sin\theta - 2a\dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{e_r} + (4a\dot{\theta}^2\cos\theta + 2a\ddot{\theta}\sin\theta)\vec{e_\theta}$$

$$\vec{a}(M/R) = (2a\ddot{\theta}\cos\theta - 4a\dot{\theta}^2\sin\theta)\vec{e_r} + (4a\dot{\theta}^2\cos\theta + 2a\ddot{\theta}\sin\theta)\vec{e_\theta}$$