Université Mohammed 1er
Faculté des Sciences
Département de Physique
Oujda

Année universitaire : 2020 - 2021

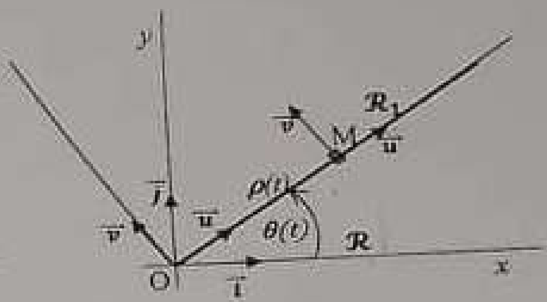
EXAMEN DE MÉCANIQUE DU POINT S.M.I-A/S.1

* SESSION DE RATTRAPAGE *

Exercice 1 :

Le référentiel $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, orthonormé direct, est supposé fixe. On choisit l'axe $O\vec{k}$ horizontal, et le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ vertical, comme c'est indiqué sur la figure.

Le repère cylindrique $\mathcal{R}_1 = (O, \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$, orthonormé direct, est en rotation autour de l'axe $O\vec{k}$ avec $\vec{k_1}$ et $\vec{k}$ confondus : ($\vec{k_1} \equiv \vec{k}$). Cette rotation est définie par l'angle :



$$\theta(t) = (\widehat{\vec{i}, \vec{u}}) = (\widehat{\vec{j}, \vec{v}}) = \omega t$$

ω est la vitesse de rotation de $\mathcal{R}_1$ *par rapport* à $\mathcal{R}$, supposée *constante*.

Dans le repère $\mathcal{R}_1$, un point matériel **M**, se déplace, sur l'axe $O\vec{u}$ tel que :

$\overrightarrow{OM} = \rho(t)\vec{u} = \rho_0[\cos\omega t + \sin\omega t]\vec{u}$;

ρ_0 *constante positive*.

1) Donner le vecteur position du point M dans le repère $\mathcal{R}_1$.

2) Donner le vecteur position du point M dans le repère $\mathcal{R}$ en utilisant les coordonnées cylindriques (ρ, θ) puis les coordonnées cartésiennes (x, y). En déduire les relations entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques.

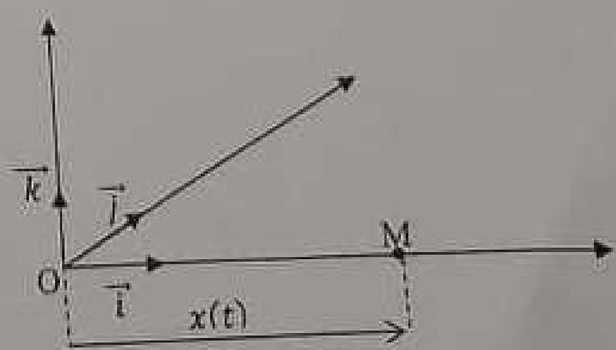
3) Déterminer, dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$, les vecteur vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$, en fonction de ρ_0 *et* ω.

EXERCICE 2 :

Soit un point matériel M qui effectue un mouvement rectiligne sur l'axe horizontal Ox.

Le mouvement est étudié dans le référentiel $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, orthonormé direct.

A l'instant initial ($t = 0$), le point se trouve à l'origine O.



1) Donner le vecteur position $\overrightarrow{OM}$.

2) Quelle est la trajectoire de ce mouvement ?

3) Déterminer le vecteur déplacement $\overrightarrow{dr}$.

4) Calculer le vecteur vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M/\mathcal{R})$ dans la base cartésienne $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

5) A quoi est égale l'abscisse curviligne $s(t)$?

6) D'après le cours, l'accélération s'exprime dans la base de Serret-Frenet $(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b})$ par :

$$\vec{\gamma}(M/\mathcal{R}) = \vec{\gamma_t} + \vec{\gamma_n} = \gamma_t\,\vec{t} + \gamma_n\,\vec{n} \quad avec: \ \gamma_t = \frac{dV}{dt} \ ; \ \gamma_n = \frac{V^2}{R} \qquad R : rayon\ de\ courbure.$$

γ_t : accélération tangentielle ; γ_n : accélération normale.

Représenter sur une figure les vecteurs : $\vec{t}$ et $\vec{n}$.

Calculer $\vec{\gamma_t}$. En déduire $\vec{\gamma_n}$ et le rayon de courbure R.

Indication :

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{\|d\vec{r}\|}$$

Université MI Oujda

Mecanique du Pnt

session de Rett 2020/2021

Ex:1

$R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{K})$ $\quad \vec{OM} = \rho \vec{u} = \rho_0(\cos\omega t + \sin\omega t)\vec{u}$

$R_1(O,\vec{u},\vec{v},\vec{K})$ $\quad \vec{\Omega}(R_1/R) = \dot{\theta}\vec{K} = \omega\vec{K}$

1- Vecteur position du pnt M dans le repère R_1

$$\vec{OM} = \rho\vec{u} = \rho_0(\cos\omega t + \sin\omega t)\vec{u} \qquad \vec{OM} = \|\vec{OM}\|\vec{u}$$

2- vecteur position du pnt M dans R

C.Cy $\quad \vec{OM} = \rho\vec{u} + \cancel{z}\vec{K} = \rho\vec{u} =$

C.Ca $\quad \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$$\vec{OM} = \rho\vec{u} = \rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho\sin\theta\,\vec{j} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$\rho\cos\theta = x \qquad \frac{y}{x} = \tan\theta$

$\rho\sin\theta = y$

3 Calcul $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M/R)$

$\ddot{\rho} = -\rho_0\omega^2(\cos\omega t + \sin\omega t)$

$\rho = \rho_0(\cos\omega t + \sin\omega t)$

$\dot{\rho} = \rho_0(-\omega\sin\omega t + \omega\cos\omega t)$

$\theta = \omega t$

$\dot{\theta} = \omega$

$\ddot{\theta} = 0$

$$\vec{V}(M/R) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_R = \frac{d\rho\vec{e_\rho}}{dt}\Big|_R = \dot{\rho}\vec{u} + \rho\dot{\theta}\vec{v}$$

$$= \rho_0\omega(\cos\omega t - \sin\omega t)\vec{u} + \rho_0\omega(\cos\omega t + \sin\omega t)\vec{v}$$

$$\vec{\gamma}(M/R_0) = \frac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\Big|_R = \ddot{\rho}\vec{u} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{v} + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{v} + \rho\ddot{\theta}\vec{v} - \rho\dot{\theta}^2\vec{u}$$

RS | IIMI

$$= \ddot{\rho}\vec{u} + 2\dot{\rho}\dot{\theta}\vec{e_\theta} - \rho\dot{\theta}^2\vec{v}$$

$$= [-\rho_0\omega^2(\cos\omega t + \sin\omega t) - \rho_0\omega^2(\cos\omega t + \sin\omega t)]\vec{u} + [2\rho_0\omega^2(\cos\omega t - \sin\omega t$$

$$= [2\rho_0\omega^2(\cos\omega t + \sin\omega t)]\vec{u} + [2\rho_0\omega^2(\cos\omega t - \sin\omega t)]\vec{v}$$

Ex 2.

$R(O\ \vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k})$ $\qquad t=0 \Rightarrow O \equiv M$

mvt rectiligne

1- Vecteur position $\vec{OM}$

$\vec{OM} = x(t)\,\vec{i}$

2- droite horizontal $\qquad y = 0$

3 -

détermination de vecteur $\vec{dr} = d\vec{OM} = dx\,\vec{i}$
déplacement

4- calcule $\vec{V}(M/R)$ et $\vec{\gamma}(M/R)$

$\vec{V}(M/R) = \left.\dfrac{d\vec{OM}}{dt}\right/_R = \dot{x}\,\vec{i}$

$\vec{\gamma}(M/R) = \left.\dfrac{d\vec{V}(M/R)}{dt}\right/_R = \ddot{x}\,\vec{i}$

5 - l'abscisse curviligne $S(t)$

Meth ① $\quad S(t) = x \qquad$ car c'est le long de trajectoire

Meth ②

$S(t) = \int \|\vec{V}(M/R_0)\|\,dt = \int \dot{x}\,dt = x + cst$

on a $\quad t=0 \rightarrow O \equiv M \qquad \vec{OM} = \vec{0}$

$x = OM = 0$

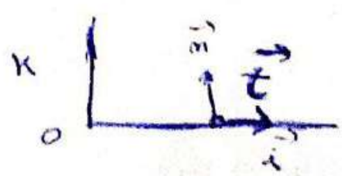
$S(t=0) = x(0) + cst = 0$

$= cst = 0$

$S(t) = x$

6 -

$\vec{\gamma}_t = \gamma_t \vec{t} = \dfrac{d\|\vec{V}(M/R_0)\|}{dt} = \dfrac{d\dot{x}}{dt}\,\vec{t} = \ddot{x}\,\vec{t}$



$\gamma_n = \sqrt{\vec{\gamma}(M/R_0)^2 - \gamma_t^2}$

$\gamma_n = \sqrt{\ddot{x}^2 - \ddot{x}^2} = 0$

$\vec{\gamma}_n = \vec{0}$

$\gamma_n = \dfrac{V^2}{R_c} \Rightarrow R_c = \infty$