Université Mohammed V
Faculté des Sciences
Rabat

Année Universitaire 2007-2008

Filière SMIA - Semestre 1

Séries + correction : Analyse *I*

Professeur : Zine El-Abidine Guennoun

Département de Mathématiques

Faculté des Sciences, 4 Avenue Ibn Battouta B.P. 1014 RP, Rabat–Maroc
Tel +212 (0) 37 77 18 34/35/38, Fax : +212 (0) 37 77 42 61, http://http://fsr.um5.ac.ma/

Table des matières

Séries des Travaux Dirigés

Série No 0 (Rappels)

Exercice 1.

Soient a et b deux nombres réels.

(a) Montrer que si $a \neq 0$ et $b \neq 0$ alors $ab \neq 0$ et $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

(b) Montrer que si $a > b > 0$ alors $b^{-1} > a^{-1}$; l'hypothèse $b > 0$ est-elle nécessaire ?

(c) Montrer que si $a < b$ alors $a < \frac{a+b}{2} < b$.

(d) Montrer que si $0 < a < b$ alors

$$\begin{cases} a < \sqrt{ab} < b \\ \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}. \end{cases}$$

(e) Montrer que

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

(f) Montrer que, si $a < b$ alors on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x - a| < |x - b| \Longleftrightarrow x < \frac{a+b}{2}.$$

(g) Déterminer $\delta > 0$ en fonction de ε pour que l'implication, ci-suivante, soit vraie

$$|x - 5| < \delta \Longrightarrow |3x - 15| < \varepsilon.$$

(h) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$|x + 4| - |x - 1| < 4.$$

Exercice 2.

(a) Montrer que $\mathbb{N}$ n'est pas borné supérieurement.

(b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [-1, +\infty[$, on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 < a < 1 \Longrightarrow a^{\frac{1}{n}} \geq a.$$

Exercice 3.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, bornée inférieurement. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

(a) $a = \inf(A)$,

(b) $\forall x \in A$ on a $a \leq x$; et si pour tout $x \in A$, $a_1 \leq x$ alors $a_1 \leq a$.

(c) $\forall x \in A$, on a $a \leq x$; et $\forall \varepsilon > 0$, $\exists x \in A$ tel que $x < a + \varepsilon$.

Exercice 4.

Soit
$$A := \left\{ \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

(a) Vérifier que A est borné et déterminer $\inf(A)$.

(b) En utilisant la définition ; montrer que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $\inf(A)$.

Série No 1

Exercice 1.

(a) Démontrer que toute suite croissante non bornée tend vers $+\infty$.

(b) En déduire la limite de la suite gémoétrique $u_n = q^n$, avec $q > 1$.

(c) Démontrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$ et calculer sa limite.

(d) En utilisant la question **(c)**, montrer que la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ est majorée. (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 2.

(a) Monstrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$.

(b) Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes. Démontrer que les deux suites de terme général $x_n = \sup(u_n, v_n)$ et $y_n = \inf(u_n, v_n)$ convergent. Exprimer leur limites en fonction de celles de (u_n) et de (v_n).

Exercice 3.

(a) Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles et $\ell \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \ell.$$

Montrer que si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang $N_0 \in \mathbb{N}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

(b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq a, \quad v_n \leq b \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = a + b.$$

En utilisant la question **(a)**, montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = b$.

(c) Vérifier la véracité des propositions suivantes, en justifiant votre réponse,

(i) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$ alors les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite ℓ.

(ii) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et (v_n) est bornée alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n v_n = 0$.

(iii) Si (u_n) et (v_n) divergent alors $(u_n + v_n)$ diverge.

Exercice 4.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par

$$\begin{cases} u_0 > 0, \text{ et } v_0 \geq u_0 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}. \end{cases}$$

(a) Démontrer que $u_n \leq v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) En déduire que les deux suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

Exercice 5.

Etudier la convergence et calculer (en cas d'éxistence) la limite des suites suivantes :

(i) $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{6 + u_n}$.

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

(iii) $u_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+2} = \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n.$$

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

Série No 2

Exercice 1.

1. En utilisant la définition, démontrer que $\lim_{x\to 3} x^2+x-5=7$.

2. Déterminer, en cas d'éxistence, les limites suivantes

(a) $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{3x^2+2x-1}{x^2-1}$ **(b)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{\tan(x)}$ **(c)** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1)\tan(\pi x)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin(x)-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos(x)-\frac{1}{2}}$ **(e)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}2x+\sqrt{4x^2-x+1}$ **(f)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\cos(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x\,\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)$ **(h)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^2\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)$ **(i)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}(-1)^{\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)}x$;

$\mathrm{E}(x)$ désigne la fonction partie entière de x.

Exercice 2.

1. On considère une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $1\leq f(x)\leq 2$. Déterminer :

(i) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$; **(ii)** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\,f(x)$; **(iii)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}x\,f(x)$.

2. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sin(x)}{x^2+1}$ n'existe pas.

3. Démontrer que si $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$ et $c,d\in\mathbb{R}$ tels que $c<\ell<d$, alors $c<f(x)<d$ au voisinage de a.

4. Soit $f : I\subset\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction croissante et soit $a\in I$. Montrer que si $\lim_{x\to a^+}f(x)$ et $\lim_{x\to a^-}f(x)$ existent alors

$$\lim_{x\to a^-}f(x)\leq f(a)\leq\lim_{x\to a^+}f(x).$$

5. Soient $p,q\in\mathbb{N}$ et $a\in\mathbb{R}_+^*$. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{x^p-a^p}{x^q-a^q}$.

Exercice 3.

1. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Etudier la continuité de la fonction g définie par

$$g(x)=\begin{cases} f(\sqrt{x})-f(-\sqrt{x}) & \text{si} \quad x\geq 0\\ 0 & \text{si} \quad x<0.\end{cases}$$

2. Montrer que l'équation $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = x$ admet une solution réelle sur $[0,1]$.
3. On considère une fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ $(a < b)$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$.
4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty;$$

Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ telle que

$$f(x) \geq f(x_0), \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Exercice 4.

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que $A = \{x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0\}$ est un voisinage de chacun de ses points. C'est à dire, $\forall x \in A,\ \exists \delta > 0$ tel que $]x-\delta, x+\delta[\subset A$.
2. Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et $x_1, x_2, \cdots, x_n \in [a,b]$ (où $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$m = \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

la moyenne des images. Montrer qu'il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) = m$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 telle que :

(i) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x+y) = f(x)f(y)$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$. Déterminer toutes les fonctions f qui vérifient cette égalité.

(iii) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$; puis déterminer toutes les fonctions qui vérifient cette égalité.

Série No 3

Exercice 1.

1. Soit U une fonction dérivable qui ne s'annulle pas. Déterminer la dérivée de la fonction

$$f(x) = \ln |U(x)| .$$

2. En déduire les dérivées des fonctions suivantes

$$u(x) = \frac{\sqrt{x+13}}{(x-4)\sqrt[3]{2x+1}}, \qquad \text{et} \qquad v(x) = \left(1+x^2\right)^{\sin(x)} .$$

Exercice 2.

Soient f et g deux fonctions dérivable en a. Déterminer les limites suivantes

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h^2) - f(a+h)}{h}, \qquad \text{et} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)g(a) - f(a)g(a+h)}{h}.$$

Exercice 3.

1.a. Montrer que l'équation $-x^3 + x^2 - x + 2 = 0$ admet une solution réelle unique.

1.b. Montrer que cette solution est comprise entre 1 et 2 ; et donner une approximation de cette solution à 10^{-2} près.

2.a. Soit $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty.$$

Montrer qu'il existe $|x_0| < 1$ tel que $f'(x_0) = 0$.

2.b. Soient $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et $a, b \in I$ telle que

$$f(a) = f(b) = 0, \quad f'(a) > 0 \quad \text{et} \quad f'(b) > 0.$$

Montrer qu'il existe $c_1,\ c_2,\ c_3 \in]a, b[$ tel que

$$f(c_2) = 0, \quad f'(c_1) = f'(c_3) = 0.$$

3. On considère la fonction $f(x) = \cos^2(x)$.

3.a. Montrer que $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ est bijective.

3.b. Déterminer le domaine de définition, $D_{f^{-1}}$, de f^{-1}.

3.c. Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur $D_{f^{-1}}$ et calculer $\left(f^{-1}\right)' \left(\frac{1}{2}\right)$.

Exercice 4.

1. Soit $a \in]0,+\infty[\backslash\{1\}$. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation

$$\log_a(x) - \log_{a^2}(x) + \log_{a^4}(x) = \frac{3}{4}.$$

2. Démontrer que

$$\forall a < b,\ \exists c \in]a,b[\quad \text{tel que} \qquad \frac{a+\sqrt{1+a^2}}{b+\sqrt{1+b^2}} = e^{\frac{a-b}{\sqrt{1+c^2}}}.$$

3. Démontrer que, pour tout $x \in R^*$,

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{|x|}\frac{\pi}{2}.$$

4. Soit $a > 0$ fixé, démontrer que pour tout $x > \frac{1}{a}$ alors

$$\arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a) - \pi.$$

Exercice 5.

Démontrer par récurrence les propositions suivantes

(i) Si $f(x) = x^r$ avec $r \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x > 0$,

$$f^{(n)}(x) = r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)x^{r-n}, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(ii) Si $f(x) = \frac{1}{x+a}$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-a\}$, alors

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}}, \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(iii) Si $f(x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right), \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Exercice 6.

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a < b)$ une fonction deux fois dérivable sur $[a,b]$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soit $x_0 \in]a,b[$, on pose

$$g(x) = f(x) - \frac{f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}(x-a)(x-b).$$

1. Calculer $g(a)$, $g(x_0)$ et $g(b)$. En déduire que la fonction g' s'annulle au moins deux fois sur $]a,b[$.

2. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f"(c) = \frac{2f(x_0)}{(x_0-a)(x_0-b)}.$$

Exercice 7.

Vérifier les identités suivantes :

(a) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$.

(b) Pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$(\cosh(x) + \sinh(x))^r = \cosh(rx) + \sinh(rx).$$

(c) Pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$(\cosh(x) - \sinh(x))^r = \cosh(rx) - \sinh(rx).$$

Série No 4

Exercice 1.

Donner le développement limité à l'ordre et au voisinage indiqués des fonction suivantes

(a) $f(x) = \cosh(x)$ à l'ordre 5 au voisinage de 0.

(b) $f(x) = \sin^3(x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

(c) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ à l'ordre 2 au voisinage de 1.

(d) $f(x) = \ln\left(1 + x + \sqrt{1+x}\right)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

(e) $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Exercice 2.

Donner le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 des la fonction

$$(x - \ln(1+x))\left(e^x - \cos(x)\right).$$

En déduire $f'(0)$, $f"(0)$, $f^{(3)}(0)$ et $f^{(4)}(0)$.

Exercice 3.

En utilisant les développements limités, calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x) + 4\sin^3(x) - 3\ln(1+x)}{(e^x - 1)\sin(x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2}\right)\ln(1+x)}{\cos(x) + \sin(x) - e^x},$$

et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(x) - 2\sinh(2x) + \sinh(3x)}{\ln\left(1 + x + 2x^2\right) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2}.$$

Exercice 4.

En utilisant le développement limité au voisinage de ∞, calculer les limites suivantes

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{e} - \left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1}\right).$$

Exercice 5.

On considère la fonction
$$f(x) = \frac{1}{x}\left(2\sin(x) + e^x - \cos(x)\right).$$

1. Donner le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 2 de f et en déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.

2. On considère g le prolongement de f par continuité en 0,
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 3 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de g au point $(0, 3)$; ainsi que sa position par rapport à la courbe de g au voisinage de ce point.

Correction

Corrigé de la série No 0

Exercice 1.

Soient a et b deux nombres réels. On rappelle que si $a \neq 0$ alors a^{-1} existe et $a^{-1} \neq 0$.

(a) Soient $a \neq 0$ et $b \neq 0$ et supposons que $ab = 0$, alors $a^{-1}ab = 0$ ce qui implique $b = 0$ car $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$; contradiction avec $b \neq 0$. D'après la commutativité on a $a^{-1}b^{-1} = b^{-1}a^{-1}$, donc d'après l'associativité

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = a(bb^{-1})a^{-1} = aa^{-1} = 1.$$

Par conséquent, $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = a^{-1}b^{-1}$.

(b) Soient $a > b > 0$, alors $a^{-1} > 0$ et donc $1 = a^{-1}a > a^{-1}b > 0$. Ce qui implique $a^{-1}b < 1$, d'où $a^{-1}bb^{-1} < b^{-1}$ et par conséquent, $a^{-1} < b^{-1}$.

L'hypothèse $b > 0$ est nécessaire ; prendre par exemple $2 = a > 0$ et $-3 = b < 0$: on a $a > b$ et $a^{-1} = \frac{1}{2} > b^{-1} = -\frac{1}{3}$.

(c) Si $a < b$ on ajoute a et en suite b dans les deux côtés de l'ingalité et on trouve $a + b < 2b$ et $2a < a + b$. Donc

$$a < b \Longrightarrow 2a < a + b < 2b \Longrightarrow a < \frac{a+b}{2} < b.$$

(d) Si $0 < a < b$ alors on multiplie les deux côtés de l'inégalité par a et en suite par b et on trouve $a^2 < ab$ et $ab < b^2$. Donc $a^2 < ab < b^2$ ce qui donne

$$0 < a < b \Longrightarrow a < \sqrt{ab} < b.$$

D'une autre part, on a

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)^2 > 0 \Longrightarrow \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} > 0 \Longrightarrow \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Ce qu'on appelle l'inégalité arithmético-géométrique (AM-GM).

(e) On applique l'inégalité triangulaire et on trouve

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \Longrightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$$

et de même

$$|b| = |b - a + a| \leq |a - b| + |a| \Longleftarrow |a| - |b| \geq -|a - b|.$$

Par consq́uent,

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

(f) Supposons que $a < b$, et soit $x \in \mathbb{R}$ alors

$$|x-a| < |x-b| \Longleftrightarrow (x-a)^2 < (x-b)^2 \Longleftrightarrow x^2-2ax+a^2 < x^2-2bx+b^2 \Longleftrightarrow 2x(b-a) < (b^2-a^2).$$

Et puisque $b - a > 0$ et $b^2 - a^2 = (b-a)(b+a)$ alors

$$|x-a| < |x-b| \Longleftrightarrow x < \frac{a+b}{2}.$$

(e) Puisque

$$|x-5| < \delta \longrightarrow 3|x-5| < 3\delta \Longrightarrow |3x-15| < 3\delta \leq \varepsilon.$$

Alors pour que la proposition

$$|x-5| < \delta \Longrightarrow |3x-15| < \varepsilon$$

soit vraie il suffit de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

(h) On peut utiliser le tableau des signes pour répondre à cette question. Cependant, on aimerait bien donner une réponse algébrique. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{array}{rcll}
|x+4| - |x-1| < 4 & \Longrightarrow & 0 \leq |x+4| < 4 + |x-1| & \\
& \Longrightarrow & (x+4)^2 < (4+|x-1|)^2 & \\
& \Longrightarrow & x^2+8x+16 < 16+8|x-1|+x^2-2x+1 & \\
& \Longrightarrow & |x-1| > \frac{5}{4}x - \frac{1}{8} & \\
& \Longrightarrow & x-1 > \frac{5}{4}x - \frac{1}{8} \quad \text{ou} & x-1 < -\frac{5}{4}x + \frac{1}{8} \\
& \Longrightarrow & -\frac{1}{4}x > \frac{7}{8} \qquad\quad \text{ou} & \frac{9}{4}x < \frac{9}{8} \\
& \Longrightarrow & x < -\frac{7}{4} \qquad\quad\ \text{ou} & x < \frac{1}{2} \\
& \Longrightarrow & x < \frac{1}{2}. &
\end{array}$$

Réciproquement, si $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ alors on a $(x-1) < -\frac{1}{2} < 0$ donc $|x-1| = 1-x$ et par conséquent,

$$x \in \left[-4, \frac{1}{2}\right[\Longrightarrow |x+4| - |x-1| = x+4+x-1 = 2x+3 < 4.$$

et

$$x < -4 \Longrightarrow |x+4| - |x-1| = -x-4+x-1 = -5 < 4.$$

Conclusion :

$$|x+4| - |x-1| < 4 \Longleftrightarrow x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[.$$

Exercice 2.

(a) Supposons que $\mathbb{N}$ est borné supérieurement, alors soit $N_0 = \sup\{\mathbb{N}\}$. Puisque $N_0 \in \mathbb{R}$ alors $N_0 - 1 \in \mathbb{R}$ et d'après le principe d'Archimède il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N_0 - 1 < n$ ce qui implique $N_0 < n+1$; absurde ! car $n+1 \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $\mathbb{N}$ n'est pas borné supérieurement.

(b) Pour $n = 1$ on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2\times 1+1)}{6}$. Supposons qu'on a

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + n + 1\right).$$

Donc
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$
Par conséquent, on a démontré par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(c) Soit $x \geq -1$. Par récurrence, on a pour $n = 1$, $(1+x)^1 = 1 + x \geq 1 + 1 \times x$; la proposition est vraie. Supposons que pour $n \geq 1$ on a $(1+x)^n \geq 1 + nx$, alors
$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx)$$
et puisque $(1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x$, car $nx^2 \geq 0$, alors
$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x.$$
D'où la proposition est vraie pour $n+1$. Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a
$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

(d) Soit n un entier positif supérieur ou égal à 2, et soit a un réel dans $]0,1[$. Supposons que $a^{\frac{1}{n}} \geq a$ alors $a \leq a^n$ ce qui implique que $a^{n-1} \geq 1$ donc $a \geq 1$; contradiction avec $a \in]0,1[$! Donc pour tout $n \geq 2$ et pour tout $0 < a < 1$ on a
$$a^{\frac{1}{n}} > a.$$

Exercice 3.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ bornée inférieurement.

(a) $\Longrightarrow$ **(b)** Soit $a = \inf(A)$ alors d'après la définition de la borne inférieure, pour tout $x \in A$ on a $x \geq a$.
S'il existe a_1 tel que, pour tout $x \in A$, $a_1 \leq x$ alors a_1 est un minorant et puisque $a = \inf(A)$ est le plus grand des minorants alors $a \geq a_1$.

(b) $\Longrightarrow$ **(c)** Soit $x \in A$, tel que $a \leq x$ et supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $x \in A$ on a $x \geq a + \varepsilon$ alors d'après **(b)** $a_1 = a + \varepsilon \leq a$ ce qui implique $\varepsilon \leq 0$ absurde ! Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in A$ tel que $x < a + \varepsilon$.

(c) $\Longrightarrow$ **(a)** On a $\forall x \in A, x \leq a$, alors a est un minorant donc par définition $a \leq \inf(A)$. Supposons que $a \neq \inf(A)$ c'est à dire $a < \inf(A)$ et soit $\varepsilon = \inf(A) - a$ alors $\varepsilon > 0$ et d'après **(c)** il existe $x \in A$ tel que $x < a + \varepsilon$ ce qui implique que $x < \inf(A)$ absurde ! donc $a = \inf(A)$.

Exercice 4.

Soit
$$A := \left\{ \frac{1}{n}, \qquad n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

(a) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < \frac{1}{n} \leq 1$ alors pour tout $x \in A$ on a $x \in]0,1]$ donc A est borné et $\inf(A) = 0$.

(b) Soit $\varepsilon > 0$ alors d'après la question **(c)-Ex.3** il existe $x = \frac{1}{n_0}$ (avec $n_0 \in \mathbb{N}^*$) tel que $x < \inf(A) + \varepsilon$ ce qui est équivalent à l'existence d'un entier $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n > n_0$,
$$\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \inf(A) + \varepsilon.$$
Mais $\frac{1}{n} \in A$ donc $\frac{1}{n} > \inf(A)$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
$$\inf(A) < \frac{1}{n} < \inf(A) + \varepsilon \Longleftrightarrow 0 < \frac{1}{n} - \inf(A) < \varepsilon.$$
Conclusion : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n > n_0$ on a $\left|\frac{1}{n} - \inf(A)\right| < \varepsilon$. C'est à dire que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers $\inf(A) = 0$.

Corrigé de la série No 1

Exercice 1.

(a) Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite croissante non majorée, alors pour tout $C > 0$ il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > C$, et puisque (u_n) est croissante alors pour tout $n > n_0$, $u_n > u_{n_0} > C$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

(b) Soit $q > 1$. On pose $u_n = q^n$ alors on a $u_{n+1} = q^{n+1} = qu_n > u_n$ donc (u_n) est croissante. Montrons que (u_n) est non majorée : On pose $q = 1 + x$ pour tout $x > 0$ alors d'aprés la question **(c)-Ex.2.** on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = q^n = (1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Donc (u_n) n'est pas majorée est d'après **(a)** la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

(c) Soit $v_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |q|^k$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$v_n = \frac{1 - |q|^{n+1}}{1 - |q|}.$$

Et d'après la question précédente, si $|q| > 1$ la suite $(|q|^n)$ est divergente. Si $|q| = 1$ alors $v_n = n + 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, qui est une suite croissante non majorée alors elle est divergente. Si $0 < |q| < 1$ alors $\frac{1}{|q|} > 1$; donc la suite $w_n = \frac{1}{|q|^n}$ tend vers $+\infty$ et par suite $|q|^n = \frac{1}{w_n}$ tend vers 0. Par conséquent, la suite (v_n) converge si et seuelement si $|q| < 1$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} q^n = \frac{1}{1 - q}.$$

Notez que le cas $|q| = 0$ est évidente, puisque dans ce cas $v_n = 1$ est une suite constante qui est convergente.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!}.$$

Puisque pour tout $k \geq 2$ on a

$$k! = 2 \times 3 \times \cdots \times k \geq 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^{k-1},$$

alors

$$0 < u_n \leq 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 2 + 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^k}.$$

Puisque $0 < \frac{1}{2} < 1$ alors la suite (u_n) est majorée et puisque $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$ alors (u_n) est croissante. Par conséquent (u_n) est convergente.

Exercice 2.

(a) D'après la question **(e)-Ex 1- Série** 0., on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$||u_n| - |\ell|| \leq |u_n - \ell|.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$ on a $|u_n - \ell| < \varepsilon$. Par conséquent, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$ on a $||u_n| - |\ell|| < \varepsilon$. C'est à dire, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |\ell|$.

(b) Soient (u_n) et (v_n) deux suites rélle convergentes. On pose

$$x_n = \sup(u_n, v_n) \qquad \text{et} \qquad x_n = \inf(u_n, v_n)\,.$$

Alors les suites (x_n) et (y_n) sont convergentes. En effet,
Puisque, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ on a

$$\sup(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2} \qquad \text{et} \qquad \inf(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}.$$

Donc

$$x_n = \frac{u_n + v_n + |u_n - v_n|}{2} \qquad \text{et} \qquad y_n = \frac{u_n + v_n - |u_n - v_n|}{2},$$

Soient a et b, respectivement, les limites de (u_n) et (v_n) alors

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2} = \sup(a, b) \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} y_n = \frac{a + b - |a - b|}{2} = \inf(a, b).$$

Exercice 3.

(a) Soient (u_n) et (w_n) deux suites rélles qui convergent vers la même limite ℓ, (v_n) une suite ; telles que, pour tout $n \geq N_0 \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Donc, puisque $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} w_n = \ell$ alors :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 > 0, \qquad \forall n > N_1, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon_1,$$

et

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2 > 0, \qquad \forall n > N_2, \quad |w_n - \ell| < \varepsilon_1.$$

Soit $N = \sup(N_0, N_1, N_2)$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n > N$ on a

$$\ell - \varepsilon u_n < \ell + \varepsilon, \quad \ell - \varepsilon w_n < \ell + \varepsilon \quad \text{et} \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Ce qui implique, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n > N$

$$\ell - \varepsilon v_n < \ell + \varepsilon \Longleftrightarrow |v_n - \ell| \varepsilon;$$

ce qui montre que $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = \ell$.

(b) Soient les suites de terme général $u_n \leq a$ et $v_n \leq b$ où $a, b \in \mathbb{R}$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n + v_n) = a + b$.
On pose $x_n = a - u_n$ et $y_n = b - v_n$ alors les suites (x_n) et (y_n) sont positives ; deplus, pour tout n,

$$0 \leq x_n \leq x_n + y_n \qquad \text{et} \qquad 0 \leq y_n \leq x_n + y_n$$

et puisque

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty}((a+b)-(u_n+v_n))=0$$

alors dáprès la question précédente **(a)** on a

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n=a \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n=0 \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} v_n=b.$$

(c) (i) Proposition fausse ! contre-exemple : prend $u_n=(-1)^n$ et $v_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$.

(ii) Proposition vraie. En effet, puisque (v_n) est bornée alors il existe $M>0$ tel que $|v_n|\leq M$, pour tout $n\geq N_0$. Donc, pour tout $n\geq N_0$ on a $0\leq |u_nv_n|\leq M|u_n|$. Par conséquent, en utilisant la question **(a)- Ex 3. et (a)-Ex 2.**,

$$\lim_{n\to\infty} u_n=0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}|u_nv_n|=0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_nv_n=0.$$

(iii) Proposition fausse ! contre exemple : prend $u_n=n$ et $v_n=\frac{1}{n}-n$.

Exercice 4.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $v_0\geq u_0>0$, et

$$u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1}=\frac{u_n+v_n}{2}.$$

(a) Soit $n\in\mathbb{N}$, alors les suites (u_n) et (v_n) sont positives (vous pouvez utiliser la récurrence). Deplus, pour $n\geq 1$ on a

$$v_n-u_n=\frac{u_{n-1}+v_{n-1}}{2}-\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}=\frac{u_{n-1}-2\sqrt{u_{n-1}v_{n-1}}+v_{n-1}}{2}=\frac{\left(\sqrt{u_{n-1}}-\sqrt{v_{n-1}}\right)^2}{2}\geq 0.$$

Donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq v_n$.

(b) On a

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{u_nv_n}-u_n=\sqrt{u_n}\left(\sqrt{v_n}-\sqrt{u_n}\right)\geq 0$$

alors (u_n) est croissante, donc en particulier, $u_n\geq u_0$. De même, on a

$$v_{n+1}-v_n=\frac{u_n-v_n}{2}\leq 0$$

alors (v_n) est décroissante et en particulier $v_n\leq v_0$. Et puisque $u_n\leq v_n\leq v_0$ et $v_n\geq u_n\geq u_0$ alors (u_n) est (u_n) est majorée par v_0 et (v_n) est minorée par u_0. Par conséquent, (u_n) et (v_n) sont convergentes. Si

$$\ell_1=\lim_{n\to\infty} u_n \qquad \text{et} \qquad \ell_2=\lim_{n\to\infty} v_n$$

alors $\ell_1^2=\ell_1\ell_2$ et $2\ell_2=\ell_1+\ell_2$ ce qui implique que $\ell_2=\ell_1$.

Exercice 5.

Etudions la convergence des suites suivantes :

(i) $u_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}=\sqrt{u_n+6}$.

Soit f la fonction définie sur $I=[1,3]$ par

$$f(x)=\sqrt{x+6},$$

alors f est une fonction continue et strictement croissante sur I, car si $x>y$ alors $\sqrt{x+6}>\sqrt{y+6}$ donc $f(x)>f(y)$. Par conséquent, $f(I)\subset I$. On déduit que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\in[1,3]$; c'est à dire (u_n) est bornée.

D'une autre part, on a pour tout $x \in I$,

$$f(x) - x = \sqrt{x+6} - x = \frac{-x^2 + x + 6}{\sqrt{x+6} + x} = \frac{(3-x)(x+2)}{x + \sqrt{x+6}} > 0,$$

on déduit donc que $f(u_n) > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; c'est à dire (u_n) est croissante. Par conséquent, (u_n) est majorée (par 3) et croissante donc convergente. Soit ℓ la limite de (u_n), alors on a $f(\ell) = \ell$ ce qui implique $\ell = 3$ ou $\ell = -2$ et puisque $-2 \notin I$ alors $\ell = 3$. Donc

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 3.$$

(ii) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k un entier tel que $1 \leq k \leq n$ alors

$$n^2 + 1 \leq n^2 + k \leq n^2 + n \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^2+1}},$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$$

c'est à dire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} \Longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Or, en utilisant la question **(a)-Ex 3.** on trouve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 1.$$

(iii) $u_0 = 4$, $u_1 = \frac{7}{3}$ et, pour tout $n \geq 2$, $\qquad u_{n+2} = \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n$.

(u_n) est suite récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractèristique est

$$q^2 - \frac{7}{6}q + \frac{1}{3} = 0 \Longleftrightarrow 6q^2 - 7q + 2 = 0. \qquad (E)$$

On a $\Delta = 49 - 48 = 1$, donc les racines de (E) sont

$$q_1 = \frac{2}{3} \qquad \text{et} \qquad q_2 = \frac{1}{2}.$$

D'où,

$$u_n = a\left(\frac{2}{3}\right)^n + b\left(\frac{1}{2}\right)^n, \qquad (a,b) \in \mathbb{R}^2$$

Or,

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_1 = \frac{7}{3} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a + b = 4 \\ \frac{2a}{3} + \frac{b}{2} = \frac{7}{3} \end{cases} \Longrightarrow a = b = 2.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n} + \frac{1}{2^{n-1}}$$

Par conséquent, en utilisant la question **(b)-Ex 1.**, on trouve

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

(iv) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

On a pour tout entier k,

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

donc (u_n) n'est qu'une somme télescopique ; c'est à dire,

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \cdots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$u_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

et par conséquent,

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 1.$$

Corrigé de la série No 2

Exercice 1.

1. On a pour tout x, $|(x^2+x-5)-7| = |x^2+x-12| = |x+4||x-3|$. Donc, soit $x \in]2,4[$ qui est un intervalle ouvert centré en 3 (c'est à dire, un voisinage de 3) alors soit $\varepsilon > 0$,

$$|(x^2+x-5)-7| \geq \varepsilon \Longrightarrow |x+4||x-3| \geq \varepsilon \Longrightarrow |x-3| \geq \frac{\varepsilon}{|x+4|} \geq \frac{\varepsilon}{8};$$

Car $2 < x < 4$ implique $|x+4| = x+4 < 8$. Par conséquent,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \max\left(1, \frac{\varepsilon}{8}\right) > 0, \qquad \text{tel que} \quad |x-3| < \delta \Longrightarrow |(x^2+x-5)-7| < \varepsilon.$$

2. Calcul des limites

(a) $\displaystyle \lim_{x\to -1} \frac{3x^2+2x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(3x-1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{3x-1}{x-1} = 2.$

(b) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{\tan(x)} = \lim_{xto0} 3\, \frac{\sin(3x)}{3x} \times \frac{x}{\tan(x)} = 3.$

(c) $\displaystyle \lim_{x\to \frac{1}{2}} (2x-1)\tan(\pi x) = \lim_{x\to \frac{1}{2}} 2\, \frac{x-\frac{1}{2}}{\cos(\pi x) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} \sin(\pi x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\cos'\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1.$

(d) $\displaystyle \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos(x) - \frac{1}{2}} = \lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos(x) - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\sin'\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{-\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

(e) $\displaystyle \lim_{x\to -\infty} \left(2x + \sqrt{4x^2-x+1}\right) = \lim_{x\to -\infty} \left(2x + |2x|\sqrt{1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}}\right) = \lim_{x\to -\infty} 2x\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}}\right)$

$\displaystyle = \lim_{x\to -\infty} 2x\, \frac{\frac{1}{4x} - \frac{1}{4x^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}}} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4x} + \frac{1}{4x^2}}} = \frac{1}{4}.$

(f) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \cos(x)\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = 0$

car,

$$\forall x > 1, \quad \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \Longrightarrow \lim_{x\to +\infty} \frac{\cos(x)}{x^2} = 0 \quad \text{et} \qquad \lim_{x\to +\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1.$$

(g) On a pour tout $0 < x < 1$,

$$\frac{1}{x} - 1 < \mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

donc, pour tout $x \in]0,1[$

$$1 - x < x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

et par conséquent,

$$\lim_{x \to 0^+} x\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) = 1.$$

(h) De même on a pour tout $x \in]0,1[$

$$x(1-x) < x^2\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$$

donc

$$\lim_{x \to 0^+} x^2\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

(i) Soit $x \in]0,1[$, alors

$$\left|(-1)^{\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)}\right| = 1$$

donc

$$\lim_{x \to 0^+} x(-1)^{\mathrm{E}\left(\frac{1}{x}\right)} = 0.$$

Exercice 2.

1. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 \leq f(x) \leq 2$, alors

(i) Pour tout $x \geq 0$, $\frac{1}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{2}{x}$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

(ii) Pour tout $x > 1$, $x \leq xf(x) \leq 2x$ alors

$$\lim_{x \to +\infty} 2x = \lim_{x \to +\infty} x = +\infty \Longrightarrow \lim_{x \to +\infty} xf(x) = +\infty.$$

et

(iii)

$$\lim_{x \to 0} 2x = \lim_{x \to 0} x = 0 \Longrightarrow \lim_{x \to 0} xf(x) = 0.$$

2. Soit $f(x) = \frac{x^2 \sin(x)}{x^2+1}$, on cherche à démontrer que la limite de f quant x tend vers $+\infty$ n'existe pas. Soit $x > 0$, alors

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}\sin(x) \Longleftrightarrow \frac{x^2+1}{x^2}f(x) = \sin(x) \Longleftrightarrow \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)f(x) = \sin(x).$$

et puisque $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1$, alors f et sin ont même comportement au voisinage de $+\infty$. Or la fonction sin n'admet pas de limite en $+\infty$ alors de même f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Preuve de sin **n'admet pas de limite en** $+\infty$. Puisque la fonction sin est bornée entre -1 et 1, alors la limite de sin est comprise entre -1 et 1. Supposons que sin tend vers $\ell \in [-1,1]$. On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$$

alors $\lim_{x \to +\infty} \cos(x) = \ell$, et par conséquent, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1 \Longrightarrow 2\ell^2 = 1 \Longrightarrow \ell^2 = \frac{1}{2}$.
D'une autre part, on a

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) \Longrightarrow \ell = 2\ell^2$$

Absurde ! car ℓ est unique et ne peut pas vérifie à la fois $\ell^2 = \frac{1}{2}$ et $\ell = 2\ell^2$.

3. Supposons que $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ tel que $\ell \in]c, d[$ $(c < d \in \mathbb{R})$ alors

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\quad \forall|x-a| < \delta,\quad |f(x)-\ell| < \varepsilon \Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\quad \forall|x-a| < \delta,\quad \ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$$

et puisque $\ell \in]c, d[$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$ on a

$$c - \varepsilon < \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon < d + \varepsilon$$

ce qui implique que au voisinage de a, on a $c < f(x) < d$.

4. Puisque f est croissante alors pour tout $h > 0$ on a $f(a-h) < f(a) < f(a+h)$ si les limites $\lim_{x\to a^+} f(x)$ et $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existent alors

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(a+h) \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(a-h)$$

alors

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{h\to 0^+} f(a-h) < f(a) < \lim_{h\to 0^+} f(a+h) = \lim_{x\to a^+} f(x).$$

5. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $a > 0$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$x^n - a^n = (x-a)\sum_{k=0}^{n-1} x^k a^{n-k-1}$$

alors

$$\frac{x^p - a^p}{x^q - a^q} = \frac{x-a}{x-a}\frac{\sum_{k=0}^{p-1} x^k a^{p-k-1}}{\sum_{k=0}^{q-1} x^k a^{q-k-1}},$$

et par conséquent,

$$\lim_{x\to a} \frac{x^p - a^p}{x^q - a^q} = \frac{\sum_{k=0}^{p-1} a^k a^{p-k-1}}{\sum_{k=0}^{q-1} a^k a^{q-k-1}} = \frac{pa^{p-1}}{qa^{q-1}} = \frac{p}{q}\, a^{p-q}.$$

Exercice 3.

1. Puisque f est continue en 0 alors

$$\lim_{x\to 0^+} f(\sqrt{x}) - f(-\sqrt{x}) = f(0) - f(0) = 0$$

et

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 = g(0)$$

alors g est continue en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ car la fonction f et la fonction nulle sont continues.

2. Soit $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x$ alors f est continue sur $[0, 1]$ et $f(0) \times f(1) = 1 \times (-1) < 0$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in]0, 1[$ tel que $f(c) = 0$. C'est à dire $f(x) = 0$ admet une solution réelle sur $]0, 1[$.

3. Soit $g(x) = x - f(x)$ alors puisque f est continue sur $[a, b]$ alors g est continue sur $[a, b]$ et $g(a) = a - f(a) \leq 0$ et $g(b) \geq 0$ car $a \leq f(x) \leq b$ pour tout $x \in [a, b]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c \in]a, b[$ tel que $g(c) = 0$ c'est à dire tel que $f(c) = c$.

4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$. cette dérnière est équivalente à : pour tout $A > 0$, il existe $M > 0$ tel que pour tout $|x| > M$ on a $f(x) \geq A$. Alors en particulier, pour $A = f(0)$ il existe un $M_0 > 0$ tel que pour tout $|x| > M_0$ on a $f(x) > f(0)$. La fonction f est continue sur $[-M_0, M_0]$ qui est un compact de $\mathbb{R}$ donc f atteint ses bornes dans $[-M, M]$. D'où il existe $x_0 \in [-M_0, M_0]$ tel que $f(x_0) = \min_{x\in[-M_0,M_0]}(f(x))$, et puisque $0 \in [-M_0, M_0]$ alors $f(0) \geq f(x_0)$. Par conséquent, il existe x_0 tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) \geq f(x_0)$.

Exercice 4.

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose

$$A = \{x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0\},$$

montrons que A est un voisinage de chacun de ses points.
Soit $w \in A$, donc $f(w) \neq 0$ ce qui est équivalent à $|f(w)| > 0$. D'une autre part, puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ alors f est continue en w et donc $|f|$ est continue en w ; donc d'après la définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $|x - w| < \delta$ on a $||f(x)| - |f(w)|| < \varepsilon$.
Posons en particulier, $\varepsilon = \frac{|f(w)|}{2}$; alors il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $x \in]w - \delta_0, w + \delta_0[$ on a $||f(x)| - |f(w)|| < \frac{|f(w)|}{2}$.
Soit, donc, $x \in]w - \delta_0, w + \delta_0[$, alors on a

$$||f(x)| - |f(w)|| < \frac{|f(w)|}{2} \Longleftrightarrow \frac{1}{2}|f(w)| < |f(x)| < \frac{3}{2}|f(w)|.$$

Et puisque $|f(w)| > 0$ alors pour tout $x \in]w - \delta_0, w + \delta_0[$ on a $|f(x)| > 0$ (ce qui équivalent à $f(x) \neq 0$) et par conséquent, $]w - \delta_0, w + \delta_0[\subset A$. Ce qui montre que A est un voisinage de chacun de ses points.

2. Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soient $(x_k)_{k=1}^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) des réels dans $[a, b]$. On pose

$$m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k),$$

montrons qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = m$.
La fonction f est continue sur $[a, b]$ qui est un compact de $\mathbb{R}$ alors f atteint ses bornes. Posons alors,

$$\alpha = \min_{x\in[a,b]}(f(x)) \qquad \text{et} \qquad \beta = \max_{x\in[a,b]}(f(x)).$$

Donc puisque, $x_k \in [a, b]$ pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ alors $\alpha \leq f(x_k) \leq \beta$ pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ et par conséquent,

$$\alpha = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\beta = \beta;$$

c'est à dire, $m \in f([a, b])$. Et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = m$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0.

(i) Montrons que si pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x + y) = f(x)f(y)$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$.
On a pour $x = y = 0$, $f(0) = f(0 + 0) = f(0)f(0)$ alors $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Cas 1. Si $f(0) = 0$, alors on pose $y = 0$ et $x \neq 0$ alors $f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0) = 0$. Donc f est une fonction nulle sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$ (comme une fonction constante).

Cas 2. Soit alors $f(0) = 1$. On a pour tout $x, h \in \mathbb{R}$

$$|f(x + h) - f(x)| = |f(x)f(h) - f(x)| = |f(x)||f(h) - 1|$$

et puisque f est continue en 0 alors $\lim_{h\to 0} |f(h) - 1| = \lim_{h\to 0} |f(h) - f(0)| = 0$. Par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{h\to 0} |f(x + h) - f(x)| = 0 \Longleftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x + h) = f(x).$$

Ce qui montre la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

(ii) Résoudrons l'équation fonctionnelle $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f\left(\frac{x}{2}\right)$, $f\left(\frac{x}{2}\right) = f\left(\frac{x}{4}\right)$, $f\left(\frac{x}{4}\right) = f\left(\frac{x}{8}\right)$, $\cdots$. Donc, par récurrence, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Et puisque f est continue en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f\left(\lim_{n \to +\infty} \frac{x}{2^n}\right) = f(0).$$

Par conséquent, $f(x) = f(0)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ ce qui montre que f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$ donc continue sur $\mathbb{R}$.

(iii) Soit l'équation fonctionnelle de Cauchy, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Alors pour $x = y = 0$ on a $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$; donc $f(0) = 0$.

Et puisque f est continue en 0 alors $\lim_{h \to 0} f(h) = 0$ et par conséquent, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{h \to 0} (f(x+h) - f(x)) = \lim_{h \to 0} f(h) = 0;$$

c'est à dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x).$$

Ce qui montre la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Résolution de l'équation fonctionnelle (E) : $f(x+y) = f(x)+f(y), \ (x,y) \in \mathbb{R}^2$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(nx) = f(x + (n-1)x) = f(x) + f\left((n-1)x\right) = f(x) + f(x) + f\left((n-2)x\right) = \cdots;$$

donc, par récurrence, on trouve

$$f(nx) = nf(x) + f\left((n-n)x\right) = nf(x).$$

car $f(0) = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(nx) = nf(x)$.

Posons $y = -x$ dans **(E)**, alors on a

$$0 = f(0) = f(x-x) = f(x+(-x)) = f(x) + f(-x)$$

donc on déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(-x) = -f(x)$ ce qui montre que f est une fonction impaire et par suite on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$. D'où on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(kx) = kf(x).$$

Montrons aussi que l'égalité $f(rx) = rf(x)$ reste valable pour $r \in \mathbb{Q}$. En effet, on pose $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$; alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a d'après ce qui précéde

$$qf\left(rx\right) = f\left(qrx\right) = f(px) = pf(x).$$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(rx) = \frac{p}{q} f(x) = rf(x).$$

En particulier, pour $x = 1$, on a pour tout $r \in \mathbb{Q}$,

$$f(r) = rf(1).$$

Finalement, puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(r_n) \in \mathbb{Q}$ telle que $\lim_{n\to\infty} r_n = x$. Donc, puisque f est continue sur $\mathbb{R}$ alors

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} r_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} r_n f(1) = xf(1).$$

Alors les solutions de l'équation **(E)** sont les fonctions linéaires

$$f(x) = ax, \qquad a = f(1) \in \mathbb{R}.$$

Corrigé de la série No 3

Exercice 1.

1. Soit U une fonction dérivable qui s'annulle pas sur $I \subset \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$, alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\ln|U(x)| - \ln|U(x_0)|}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{\ln\left|\frac{U(x)}{U(x_0)}\right|}{\frac{U(x)}{U(x_0)} - 1} \right) \left(\frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} \right) \frac{1}{U(x_0)}.$$

Puisque $\lim_{x \to x_0} \frac{U(x)}{U(x_0)} = 1$ car $U(x_0) \neq 0$ alors

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\ln\left|\frac{U(x)}{U(x_0)}\right|}{\frac{U(x)}{U(x_0)} - 1} = \lim_{y \to 1} \frac{\ln(y)}{y - 1} = 1;$$

et

$$\lim_{x \to x_0} \frac{U(x) - U(x_0)}{x - x_0} \frac{1}{U(x_0)} = \frac{U'(x_0)}{U(x_0)}.$$

Par conséquent,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\ln|U(x)| - \ln|U(x_0)|}{x - x_0} = \frac{U'(x_0)}{U(x_0)}.$$

On déduit que la fonction f est dérivable sur I et

$$f'(x) = \frac{U'(x)}{U(x)}.$$

2. On a pour tout $x \in I$ avec $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\setminus \{4\}$,

$$\ln|u(x)| = \ln\left|\frac{\sqrt{x+13}}{(x-4)\sqrt[3]{2x+1}}\right| = \frac{1}{2}\ln|x+13| - \ln|x-4| - \frac{1}{3}\ln|2x+1|;$$

car $\ln\left|\frac{a^r}{bc}\right| = r\ln|a| - \ln|b| - \ln|c|$. Donc, en passant à la dériviée on trouve

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{1}{2x+26} - \frac{1}{x-4} - \frac{2}{6x+3} = -\frac{10x^2 + 219x - 118}{6(x-4)(x+13)(2x+1)}$$

et par conséquent,

$$u'(x) = -\frac{10x^2 + 219x - 118}{6(x-4)(x+13)(2x+1)} u(x) = -\frac{10x^2 + 219x - 118}{(x-4)^2\sqrt{x+13}\sqrt[3]{(2x+1)^4}}.$$

De la même manière, on démontre que, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\ln|v(x)| = \sin(x)\ln(1+x^2)$$

Donc,

$$v'(x) = \left(\cos(x)\ln(1+x^2) + \frac{2x\sin(x)}{1+x^2}\right)v(x) = \left(\cos(x)\ln(1+x^2) + \frac{2x\sin(x)}{1+x^2}\right)(1+x^2)^{\sin(x)}.$$

Exercice 2.

Soient f et g deux fonctions dérivables en a. Alors

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\big(f(a+h^2)-f(a)\big)-\big(f(a+h)-f(a)\big)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} h\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2} - \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \\
&= 0\times f'(a) - f'(a) = -f'(a).
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)g(a)-f(a)g(a+h)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\big(f(a+h)-f(a)\big)g(a)-\big(g(a+h)-g(a)\big)f(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\,g(a) - \lim_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\,f(a) \\
&= f'(a)g(a) - g'(a)f(a)
\end{aligned}$$

Exercice 3.

1.a. Soit $f(x) = -x^3 + x^2 - x + 2$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme une fonction polynômiale. Deplus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = -3x^2 + 2x - 1 < 0,$$

car $\Delta < 0$ et $-3 < 0$. Alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Puisque,

$$f(\mathbb{R}) =]\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R},$$

et puisque $0 \in \mathbb{R}$ alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ unique tel que $f(x_0) = 0$.

1.b. Puisque f est continue, $f(1) = 1 > 0$ et $f(2) = -4 < 0$, alors la solution x_0 est dans $]1,2[$. Pour approximer x_0, on va utiliser la dichotomie ; en effet, on a $f\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{5}{8} < 0$ donc $x_0 \in \left]1, \frac{3}{2}\right[$. Encore, on a $f\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{23}{64} > 0$ donc $x_0 \in \left]\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right[$. Ainsi, puisque $f\left(\frac{11}{8}\right) = -\frac{43}{512} < 0$ alors $x_0 \in \left]\frac{5}{4}, \frac{11}{8}\right[$. Par suite, puisque $f\left(\frac{21}{16}\right) = \frac{611}{4096} > 0$ alors $x_0 \in \left]\frac{21}{16}, \frac{11}{8}\right[$
et puisque $f\left(\frac{43}{32}\right) = \frac{1165}{32768} > 0$ alors $x_0 \in \left]\frac{43}{32}, \frac{11}{8}\right[$. Finalement, puisque $f\left(\frac{87}{64}\right) < 0$ alors

$$\frac{43}{32} \le x_0 \le \frac{87}{64} \Longrightarrow 1.3437 \le x_0 \le 1,3593.$$

Si on continue notre algorithme pour plusieurs étapes on aura $x_0 \approx 1.3532$.

Remarque.

Vous pouvez trouver l'expression explicit de x_0 en utilisant l'algorithme de **Cardan** pour la résolution des équations polynômiales de troisième degré et vous allez trouver que

$$x_0 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\sqrt[3]{\frac{2}{47+3\sqrt{249}}} + \frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{47+3\sqrt{249}}{2}}.$$

2.a. Soit $f :]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty.$$

Cette dérnière condition est équivalente à :
pour tout $A > 0$ ils existent $\delta_1, \delta_2 > 0$ tels que pour tout $x \in]-1, -1+\delta_1[\cup]1-\delta_2, 1[$ on a $f(x) > A$.
Soit en particulier $A = f(0)$, alors il existent $\delta_1', \delta_2' \in]0,1[$ tels que $f(x) > f(0)$. Or l'intervalle $[-1+\delta_1', 1-\delta_2']$ est un compact de $\mathbb{R}$ et f est continue alors elle atteint sa borne inférieure en $x_0 \in [-1+\delta_1', 1-\delta_2']$. Et puisque $0 \in [-1+\delta_1', 1-\delta_2']$ alors $f(0) \geq f(x_0)$. On déduit que pour tout $x \in]-1,1[$ il existe $x_0 \in]-1,1[$ tel que $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $|x| < 1$.
Il nous reste à démontrer que $f'(x_0) = 0$. Soit g la fonction définie sur $]-1,1[$ par

$$g(x) = \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & \text{si} \quad x \neq x_0 \\ f'(x_0) & \text{si} \quad x = x_0 \end{cases}.$$

Donc, puisque f est dérivable sur $]-1,1[$ alors g est continue sur $]-1,1[$ et puisque $g(x) > 0$ pour tout $x > x_0$ et $g(x) < 0$ pour tout $x < x_0$ alors $g(x_0) = 0$. Et par conséquent, $f'(x_0) = 0$.
Conclusion. Il existe $x_0 \in]-1,1[$ tel que $f'(x_0) = 0$

2.b. Soit $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et soient $a < b$ deux réels dans I tels que

$$f(a) = f(b) = 0, \qquad f'(a) > 0 \quad \text{et} \quad f'(b) > 0.$$

Soit h la fonction définie par

$$h(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{(x-a)(x-b)} & \text{si} \quad x \in]a,b[\\ \\ \frac{f'(a)}{a-b} & \text{si} \quad x = a \\ \\ \frac{f'(b)}{b-a} & \text{si} \quad x = b \end{cases}$$

Alors h est continue sur $[a,b]$ et puisque $h(a) < 0$ et $h(b) > 0$ (car $f'(a), f'(b) > 0$) alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $c_2 \in]a,b[$ tel que $h(c_2) = 0$; c'est à dire, il existe $c_2 \in]a,b[$ tel que $f(c_2) = 0$.
Et puisque f est continue sur $[a,c_2]$ et sur $[c_2,b]$ et est dérivable sur $]a,c_2[$ et sur $]c_2,b[$. Et puisque $f(a) = f(c_2) = 0$ et $f(b) = f(c_2) = 0$ alors d'après le théorème de Rolle, il existe $c_1 \in]a,c_2[$ et $c_3 \in]c_2,b[$ tels que $f'(c_2) = 0$ et $f'(c_3) = 0$.

3. Soit la fonction $f(x) = \cos^2(x)$.

3.a. Puisque f est continue et dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$; et puisque

$$f'(x) = -2\sin(x)\cos(x) = -\sin(2x) < 0, \qquad \forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

car pour tout $\alpha \in]0,\pi[$ on a $\sin(\alpha) > 0$, alors f est strictement d{ecroissante et est donc bijective de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [0,1]$.

3.b. Puisque f est une bijection et à valeurs dans $[0,1]$ alors $D_{f^{-1}} = [0,1]$.

3.c. Soient $x_0 \in]0,1[$, alors il existe $y_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $y_0 = f^{-1}(x_0)$. Donc,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{y \to y_0} \frac{y - y_0}{f(y) - f(y_0)}.$$

Par conséquent, f^{-1} est dérivable sur l'ensemble

$$\left\{x \in D_{f^{-1}} = [0,1], \quad f'(x) \neq 0\right\} =]0,1[.$$

Pour $x_0 = \frac{1}{2} \in]0,1[$, on a $y_0 = \frac{\pi}{4}$. Donc

$$\left(f^{-1}\right)'\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{y \to \frac{\pi}{4}} \frac{y - \frac{\pi}{4}}{f(x) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = -1.$$

Exercice 4.

1. Soit $a > 0$ tel que $a \neq 1$. Alors pour tout $x > 0$, on a

$$\log_a(x) - \log_{a^3}(x) + \log_{a^4}(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} - \frac{\ln(x)}{3\ln(a)} + \frac{\ln(x)}{4\ln(a)} = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{11}{12}\frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

Donc,

$$\log_a(x) - \log_{a^3}(x) + \log_{a^4}(x) = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow \frac{11}{12}\frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow \ln(x) = \frac{9}{11}\ln(a) \Longleftrightarrow \ln(x) = \ln\left(a^{\frac{9}{11}}\right)$$

Par conséquent,

$$\log_a(x) - \log_{a^3}(x) + \log_{a^4}(x) = \frac{3}{4} \Longleftrightarrow x = \sqrt[11]{a^9}.$$

2. Soit la fonction $\operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Alors, puisque la fonction argsh est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$\operatorname{argsh}(b) - \operatorname{argsh}(a) = \operatorname{argsh}'(c)(b-a).$$

C'est à dire

$$\ln\left(\frac{b + \sqrt{b^2+1}}{a + \sqrt{a^2+1}}\right) = \frac{b-a}{\sqrt{c^2+1}}.$$

Par conséquent, il existe $c \in]a,b[$

$$\frac{b + \sqrt{b^2+1}}{a + \sqrt{a^2+1}} = e^{\frac{b-a}{\sqrt{c^2+1}}}.$$

3. Soit $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, alors f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Par conséquent, f est une fonction constante sur $\mathbb{R}^*$. Si $x > 0$, on prend par exemple, $x = 1$ on aura
$f(x) = f(1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$. Si $x < 0$, on prend par exemple $x = -1$ et on aura

$$f(x) = f(-1) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}.$$

Notez que $\frac{x}{|x|} = \text{signe}(x)$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{|x|}\frac{\pi}{2}.$$

4. Soit $a > 0$ fixé. On considère la fonction f définie sur $I_a = \left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$ par

$$f(x) = \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) - \arctan(x).$$

f est une fonction continue et dérivable sur I_a et

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2}{1+\left(\frac{a+x}{1-ax}\right)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+a^2}{(1-ax)^2+(a+x)^2} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1+a^2}{(1+a^2)(1+x^2)} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Donc f est une fonction constante sur I_a. Par conséquent,

$$f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\arctan\left(\frac{1}{a}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

En utilisant la question précédente, on trouve pour tout $x > \frac{1}{a}$

$$f(x) = \arctan(a) - \pi.$$

Donc, pour tout $x \in I_a$

$$\arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) = \arctan(x) + \arctan(a) - \pi.$$

Exercice 5.

(i) Soient $x > 0$, $r \in \mathbb{R}$ et $f(x) = x^r$. Pour $n = 1$ on a $f^{(1)}(x) = f'(x) = rx^{r-1}$, supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$f^{(n)}(x) = r(r-1)\cdots(r-n+1)x^{r-n}$$

et montrons que

$$f^{(n+1)}(x) = r(r-1)\cdots(r-n)x^{r-n-1}.$$

Or on a

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = r(r-1)\cdots(r-n+1)(x^{n-r})' = r(r-1)\cdots(r-n)x^{r-n-1}.$$

D'où le résultat souhaité.

(ii) De la même manière, on a pour $n = 0$ la proposition est vraie. Supposons que

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}},$$

alors

$$f^{(n+1)}(x) = (f^n)'(x) = \left(\frac{(-1)^n n!}{(a+x)^{n+1}}\right)' = \frac{-(-1)^n n!(n+1)(a+x)^n}{(a+x)^{2n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(a+x)^{n+2}}.$$

Donc la proposition est vraie pour $n+1$. D'où le résultat souhaité.

(iii) La proposition est vraie pour $n = 0$, supposons donc qu'elle est vraie pour n. Donc

$$f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(x + (n+1)\frac{\pi}{2}\right).$$

Notez que, $\cos(\theta) = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$.
Donc la proposition est aussi vraie pour $n+1$.

Exercice 6.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $f(a) = f(b) = 0$. Soient $x_0 \in]a, b[$ et g une fonction définie par

$$g(x) = f(x) - \frac{f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}(x - a)(x - b)$$

1. Alors $g(a) = f(a) = 0$, $g(x_0) = 0$ et $g(b) = f(b) = 0$.
La fonction g est continue sur $[a, x_0]$ et dérivable sur $]a,_0[$ et puisque $g(a) = g(x_0) = 0$ alors d'après le théorème de Rolle il existe $c_1 \in]a, x_0[$ tel que $g'(c_1) = 0$.
De même, $g(b) = g(x_0) = 0$ montre l'existence de $c_2 \in]x_0, b[$ tel que $g'(c_2) = 0$.

2. La fonction g' est continue sur $[c_1, c_2]$ et dérivable sur $]c_1, c_2[$ (car f est deux fois dérivable sur $[a, b]$) et $g'(c_1) = g'(c_2) = 0$ alors d'après théorème de Rolle, il existe $c \in]c_1, c_2[$ tel que $g"(c) = 0$. Or

$$g"(x) = f"(x) - \frac{f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}(x^2 - (a + b)x + ab)" = f"(x) - 2\frac{f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}.$$

Donc

$$g"(c) = 0 \Longrightarrow f"(c) = 2\frac{f(x_0)}{(x_0 - a)(x_0 - b)}.$$

Exercice 7.

(a) Soient $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y) &= \left(\tfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\left(\tfrac{e^y+e^{-y}}{2}\right) + \left(\tfrac{e^x-e^{-x}}{2}\right)\left(\tfrac{e^y-e^{-y}}{2}\right) \\
&= \tfrac{1}{4}\left(e^{x+y} + e^{x-y} + e^{-x+y} + e^{-x-y} + e^{x+y} - e^{x-y} - e^{-x+y} + e^{-x-y}\right) \\
&= = \tfrac{1}{4}\left(2e^{x+y} + 2e^{-x-y}\right) \\
&= \cosh(x + y).
\end{aligned}$$

(b) Soit $r \in \mathbb{R}$ alors

$$(\cosh(x) + \sinh(x))^r = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} + \frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^r = e^{rx}.$$

Et puisque

$$\cosh(rx) + \sinh(rx) = \frac{e^{rx} + e^{-rx}}{2} + \frac{e^{rx} - e^{-rx}}{2} = e^{rx},$$

alors

$$(\cosh(x) + \sinh(x))^r = \cosh(rx) + \sinh(rx).$$

De la même manière, on démontre que,

(c) Pour tout $r \in \mathbb{R}$,

$$(\cosh(x) - \sinh(x))^r = \cosh(rx) - \sinh(rx).$$

Corrigé de la série No 4

Exercice 1.

Le développement limité,

(a) Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\cosh^{(2n)}(x) = \cosh(x) \qquad \text{et} \qquad \cosh^{(2n+1)}(x) = \sinh(x),$$

alors $\cosh^{(2n+1)}(0) = 0$ et $\cosh^{(2n)}(0) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc en appliquant la formule de Taylor on trouve le développement limité de à l'ordre 5 au voisinage de 0,

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^5\right).$$

(b) On a démontré dans le cours que au voisinage de 0 on a $\sin(x) = x + o\left(x^2\right)$ donc au voisinage de 0 on a

$$\sin^3(x) = o(x^2).$$

(c) Le développement limité de la fonction définie par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$ au voisinage de 1 est le développement de la fonction $X \mapsto \frac{\ln(X+1)}{(X+1)^2}$ au voisinage de 0. Et puisque, au voisinage de 0 on a

$$\ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + o\left(X^2\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{(X+1)^2} = (1+X)^{-2} = 1 - 2X + 3X^2 + o\left(X^2\right),$$

et puisque

$$\left(X - \frac{X^2}{2}\right)\left(1 - 2X + 3X^2\right) = X - 2X^2 + 3X^3 - \frac{X^2}{2} + X^3 - \frac{3}{2}X^4 = X - \frac{5}{2}X^2 + 4X^3 - \frac{3}{2}X^4$$

alors

$$\frac{\ln(1+X)}{1+X} = X - \frac{5}{2}X^2 + o\left(X^2\right).$$

Et par conséquent, au voisinage de 1 on a

$$\frac{\ln(x)}{x} = (x-1) - \frac{5}{2}(x-1)^2 + o\left((x-1)^2\right).$$

(d) Soit $f(x) = \ln\left(1 + x + \sqrt{1+x}\right)$, on cherche le développement limité au voisinage de 0 à l'ordre 4. On a pour tout $x > -1$

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x}\left(1 + \sqrt{1+x}\right)\right) = \frac{1}{2}\ln(1+x) + \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x}}{2}\right) + \ln(2)$$

et puisque, au voisinage de 0 on a

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5}{128}x^4 + o\left(x^4\right)$$

alors

$$\frac{1+\sqrt{x+1}}{2} = 1 + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{16} + \frac{x^3}{32} - \frac{5}{256}x^4 + o\left(x^4\right) = 1 + Q(x) + o\left(x^4\right)$$

au voisinage de 0.
Or on a au voisinage de 1

$$\ln(X) = (X-1) - \frac{(X-1)^2}{2} + \frac{(X-1)^3}{3} - \frac{(X-1)^4}{4} + o\left((X-1)^4\right) = P(X) + o\left((X-1)^4\right)$$

Donc,

$$P\left(1+Q(x)\right) = Q(x) - \frac{Q^2(x)}{2} + \frac{Q^3(x)}{3} - \frac{Q^4(x)}{4},$$

On prend le terme polynomial de degré inférieur ou égal à 4 et on trouve, au voisinage de 0,

$$\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x}}{2}\right) = \frac{x}{4} - \frac{3}{32}x^2 + \frac{5}{96}x^3 - \frac{35}{1024}x^4 + o\left(x^4\right)$$

Finalement, puisque au voisinage de 0 on a

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)$$

alors au voisinage de 0,

$$f(x) = \ln(2) + \frac{3}{4}x - \frac{11}{32}x^2 + \frac{7}{32}x^3 - \frac{163}{1024}x^4 + o\left(x^4\right).$$

(d) Soit $f(x) = (1+2x)^{\frac{1}{x+1}} = \exp\left(\frac{\ln(1+2x)}{x+1}\right)$. Déterminons le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 4.
On a au voisinage de 0,

$$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3}x^3 - 4x^4 + o\left(x^4\right)$$

et

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o\left(x^4\right)$$

alors, après la simplification on trouve que pour tout x au voisinage de 0 on a

$$\frac{\ln(1+2x)}{1+x} = 2x - 4x^2 + \frac{20}{3}x^3 - \frac{32}{3}x^4 + o\left(x^4\right)$$

Finalement, puisque au voisinage de 0 on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$$

alors

$$f(x) = 1 + 2x - 2x^2 + \frac{10}{3}x^4 + o\left(x^4\right).$$

Exercice 2.

Soit la fonction définie au voisinage de 0 par,

$$f(x) = (x - \ln(1+x))\left(e^x - \cos(x)\right).$$

Alors d'après le cours, on a au voisinage de 0,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right),$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right)$$

et

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o\left(x^4\right).$$

Donc, au voisinage de 0 on a

$$x - \ln(1+x) = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)$$

et

$$e^x - \cos(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{6} + o\left(x^4\right)$$

Or puisque

$$\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\left(x + x^2 + \frac{x^3}{6}\right) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right)$$

alors

$$f(x) = \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right).$$

On déduit d'après la formule de Taylor que $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = \frac{1}{2} \times 3! = 3$ et $f^{(4)}(0) = \frac{1}{6} \times 4! = 4$.

Exercice 3.

(a) Soit x au voisinage de 0 et soit f la fonction donnée par

$$f(x) = \frac{\sin(3x) + 4\sin^3(x) - 3\ln(1+x)}{(e^x - 1)\sin(x)}.$$

alors puisque

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

et puisque

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

alors

$$\sin(3x) + 4\sin^3(x) - 3\ln(1+x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + o\left(x^3\right).$$

Et puisque, au voisinage de 0 on a

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

alors

$$(e^x - 1)\sin(x) = x^2 + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right).$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x^3}{x^2 + \frac{x^3}{2}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x}{1 + \frac{x}{2}} = \frac{3}{2}.$$

(b) Soit la fonction g définie au voisinage de 0 par

$$g(x) = \frac{1 - \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2}\right)\ln(1+x)}{\cos(x) + \sin(x) - e^x}.$$

Alors puisque, au voisinage de 0 on a

$$1 - \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x}{2}\right)\ln(1+x) = 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}\right) + o\left(x^3\right) = -\frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{12} + o\left(x^3\right)$$

et

$$\cos(x) + \sin(x) - e^x = -x^2 - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

Alors

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{12}}{-x^2 - \frac{x^3}{3}} = \frac{1}{12}.$$

(c) Soit au voisinage de 0 la fonction suivante

$$h(x) = \frac{\sinh(x) - 2\sinh(2x) + \sinh(3x)}{(1 + x + 2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2}.$$

Donc, puisque

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

$$\sinh(x) - 2\sinh(2x) + \sinh(3x) = 2x^3 + o\left(x^3\right).$$

et

$$\ln\left(1 + x + 2x^2\right) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2 = -\frac{13}{6}x^3 + o\left(x^3\right)$$

Alors

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{-\frac{13}{6}x^3} = -\frac{12}{13}.$$

Exercice 4.

(a) Soit $x > 1$. On pose

$$f(x) = x\left(e^{-1} - \left(\frac{x}{1+x}\right)^x\right)$$

On a

$$f(x) = xe^{-1} - x\exp\left(x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right) = xe^{-1} - x\exp\left(-x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right).$$

Pour déterminer le développement limité en $+\infty$ de f il fallait déterminer le développement limité de $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ en 0, donc

$$g(x) = \frac{1}{xe} - \frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{x}\ln(1+x)\right) = \frac{1}{xe}\left(1 - \exp\left(1 - \frac{1}{x}\ln(1+x)\right)\right);$$

et puisque, au voisinage de 0

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o\left(x^2\right)$$

et pour X au voisinage de 0 on a

$$e^X = 1 + X + \frac{X^2}{2} + o\left(X^2\right).$$

donc au voisinage de 0 on a

$$\exp\left(1 - \frac{1}{x}\ln(1+x)\right) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{5}{24}x^2 + o\left(x^2\right).$$

Par conséquent,

$$g(x) = -\frac{1}{2e} + \frac{5}{24e}x + o(x)$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = -\frac{1}{2e}.$$

(b) Soit x un réel suffisamment grand, on pose

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 + x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1},$$

Pour déterminer le développement limité au voisinage de $+\infty$ il suffit de trouver le développement de la fonction $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de 0. On a au voisinage de 0

$$g(x) = \frac{1}{x}\left(\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - \sqrt{1 - x - x^2}\right)$$

Or,

$$\sqrt[3]{x^3 + x + 1} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} + o\left(x^2\right)$$

et

$$\sqrt{1 - x - x^2} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 + o\left(x^2\right)$$

Donc

$$g(x) = \frac{5}{6} + \frac{37}{72}x + o(x).$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \frac{5}{6}.$$

Exercice 5.

Soit f une fonction définie par

$$f(x) = \frac{2\sin(x) + e^x - \cos(x)}{x}.$$

1. Le développement limité de f au voisinage de 0 à l'ordre 2.
On a au voisinage de 0,

$$2\sin(x) + e^x - \cos(x) = 2\left(x - \frac{x^3}{6}\right) + \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right) - \left(1 - \frac{x^2}{2}\right) + o\left(x^3\right)$$

c'est à dire

$$2\sin(x) + e^x - \cos(x) = 3x + x^2 - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

donc

$$g(x) = 3 + x - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right).$$

Par conséquent,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 3.$$

(b) D'après la question précédente, on a $y = x + 3$ est léquation de la tangente au point $(0, 3)$ et puisque $g(x) - y = -\frac{x^2}{6} + o(x^2)$ et $-\frac{x^2}{6} \leq 0$ alors la courbe de g est au dessous de la tangente y.