Université Sultan Moulay Slimane
FST Béni Mellal
Département : Génie Mécanique

Année Universitaire 2020/2021

Module : Mécanique du Point Matériel et Optique Géométrique
Option : MIPC -GE/GM

Examen de module Durée 1h30min

Exercice n°1

Par rapport au repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct, soit $\vec{U}=(0,3,1)$ et $\vec{V}=(0,1,2)$

1) Calculer $\vec{U}\times\vec{V}$ et l'angle $\varphi=(\vec{U},\vec{V})$.

2) Calculer les composantes de $\vec{W}=\vec{U}\wedge\vec{V}$.

3) Calculer le produit mixte $(\vec{U},\vec{V},\vec{W})$. Que représente ce produit mixte ?

Exercice n°2

Les coordonnées (x,y) d'une particule dans un repère orthonormé xOy sont données en fonction du temps par : $x(t)=2t+1$ et $y(t)=4t(t-1)$.

1. Déterminer l'équation de la trajectoire de la particule.
2. Déterminer les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération.
3. Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération et déduire le rayon de courbure de la trajectoire en fonction du temps.

Exercice n°3

Soient $\mathfrak{R}(O,xyz)$ un référentiel absolu muni de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et $\mathfrak{R}_1(O_1,\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{k})$ le référentiel relatif dont l'origine O_1 est en mouvement rectiligne sur l'axe (Oz). On donne $\overrightarrow{OO_1}=at\vec{k}$ où a est une constante positive et t le temps.

En plus, $\mathfrak{R}_1$ tourne autour de l'axe (Oz) avec une vitesse angulaire constante ω_1 telle que $\vec{\Omega}(\mathfrak{R}1/\mathfrak{R})=\omega_1\vec{k}$ $(\omega_1=\theta)$. Dans le plan horizontal $(O_1,\vec{u}_1,\vec{u}_2)$, une tige (T) tourne autour de l'axe (O_1z) avec une vitesse angulaire constante ω_2, tel que $\varphi=\omega_2 t=(\widehat{\vec{u}1,\vec{e}_\rho})$ où $\vec{e}_\rho$ est le vecteur unitaire porté par la tige (T).

Un point M est assujetti à se déplacer sur la Tige (T). Il est repéré dans le référentiel $\mathfrak{R}_1$ par : $\overrightarrow{O1M}=\rho\vec{e}_\rho$ où $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$ est une base mobile dans $\mathfrak{R}_1$.

N.B : Toutes les expressions vectorielles doivent être exprimées dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{k})$.

I-Etude de la cinématique de M par décomposition de mouvement :

1) Déterminer $\vec{V}_r(M)$ la vitesse relative de **M**.

2) Déterminer $\vec{V}_e(M)$ la vitesse d'entrainement de **M**.

3) En déduire $\vec{V}_a(M)$ la vitesse absolue de **M**.

4) Déterminer $\vec{\gamma}_r(M)$ l'accélération relative de **M**.

5) Déterminer $\vec{\gamma}_e(M)$ l'accélération d'entrainement de **M**.

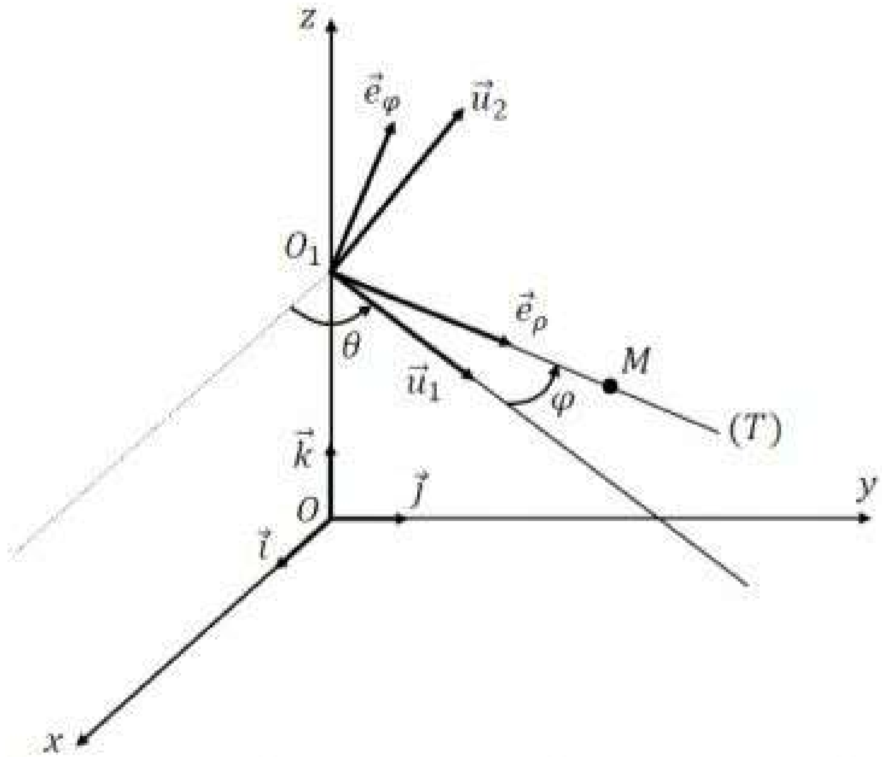
6) Déterminer $\vec{\gamma}_c(M)$ l'accélération de Coriolis de **M**.

7) En déduire $\vec{\gamma}_a(M)$ l'accélération absolue de **M**.

II-Etude de la cinématique de M par calcul direct :

8) Retrouver $\vec{V}_a(M)$ par calcul direct.

9) Retrouver $\vec{\gamma}_a(M)$ par calcul direct.



<u>Bonne chance</u>

Barroug1962@gmail.com

FST Béni Mellal

Examen Mecanique du Point

2020/2021

Ex n°1 :

$\vec{u} = (0, 3, 1)$ $\quad$ $\vec{v}(0, 1, 2)$

1. calcul $\vec{u}.\vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v} = (3\vec{j} + 1\vec{k}).(\vec{j} + 2K)$ $\quad$ $\vec{k}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{j} = 1$, $\vec{j}.\vec{k} = 0$

$= 3 + 2 = 5$

calcule l'angle φ

$\cos\varphi = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|} = \frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + 2K\pi$

2- calcul $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{K} = 5\vec{i} = \vec{w}$

3-

$\vec{w}.\underbrace{(\vec{u} \wedge \vec{v})}_{w} = \vec{w}^2 = 25$ $\quad$ $w\perp$

le produit mixte de trois vecters $\vec{w}, \vec{u}$ et $\vec{v}$ est scalaire

Ex n°2 : $\quad$ A. SHIMI

$x = 2t + 1$ $\quad$ $y = 4t(t-1)$

1. $t = \frac{x-1}{2}$ $\quad$ $y = 4\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{x-1}{2}\right)$

l'equation de la trajectoire $y = x^2 - 2x + 1 - 2x + 2$

$$\boxed{y = x^2 - 4x + 3}$$

2- calcule de la vitesse et accélération

$\begin{cases} y = 4t(t-1) \\ \dot{y} = 8t - 4 \\ \ddot{y} = 8 \end{cases}$ $\quad$ $x = 2t + 1$, $\dot{x} = 2$, $\ddot{x} = 0$

$\vec{V}(M/R_0) = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big/_{R_0} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$

$\vec{V}(M/R_0) = 2\vec{i} + 4(2t - 1)\vec{j}$

$\vec{\gamma}(M/R_0) = \frac{d\vec{V}(M/R_0)}{dt}\Big/_{R_0} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j}$

$\vec{\gamma}(M/R_0) = 8\vec{j}$

3- calcule de γ_n et γ_t et R_c

On a $\vec{\gamma}(M/R_0) = \gamma_n \vec{n} + \gamma_t \vec{z}$ avec $\gamma_t = \dfrac{d\|\vec{V}(M/R_0)\|}{dt}$

$\vec{\gamma}_n = \dfrac{\vec{V}^2}{R_c}$

$\|\vec{V}(M/R_0)\| = 2\sqrt{1+4(2t-1)^2}$

$= 2\sqrt{1+16t^2-16t+4}$

$\|\vec{V}(M/R_0)\| = 2\sqrt{16t^2-16t+5}$

$\gamma_t = \dfrac{d\|\vec{V}(M/R_0)\|}{dt}\Big|_{R_0} = 2\dfrac{d\sqrt{16t^2-16t+5}}{dt}$

$\sqrt{u}' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$\gamma_t = \dfrac{16(2t-1)}{\sqrt{16t^2-16t+5}}$

$\gamma(M/R_0) = \sqrt{\gamma_t^2 + \gamma_n^2}$

$\gamma_n = \sqrt{\gamma^2(M/R_0) - \gamma_t^2} = \sqrt{8^2 - \dfrac{16^2(2t-1)^2}{16t^2-16t+5}}$

$= 8\sqrt{\dfrac{(16t^2-16t+5)-(16t^2-16t+4)}{16t^2-16t+5}}$

$\gamma_n = 8\sqrt{\dfrac{1}{16t^2-16t+5}}$

$R_c = \dfrac{\vec{V}^2}{\gamma_n} = \dfrac{4(16t^2-16t+5)}{8\sqrt{\dfrac{1}{16t^2-16t+5}}} = \dfrac{1}{2}(16t^2-16t+5)^{3/2}$

Ex n°3 :

$R(O,x,y,z)$ absolu $\qquad \vec{OO_1} = a t \vec{K} \qquad \vec{O_1M} = \rho \vec{e_\rho}$

$R_1(O_1, \vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{K})$ relatif $\qquad \vec{\Omega}(R_1/R_0) = \omega_1 \vec{K} = \dot{\theta}\vec{K}$

$R_2(O_1, \vec{e_\rho}, \vec{e_\varphi}, \vec{K})$ $\qquad \vec{\Omega}(R_2/R_1) = \omega_2 \vec{K} = \dot{\varphi}\vec{K}$

I - Etude de la cinematique de M par décomposition de mvt

1- $\vec{V_r} = \vec{V}(M/R_1) = \dfrac{d\vec{O_1M}}{dt}\Big|_{R_1} = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + \rho\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$

$\dfrac{d\vec{e_\rho}}{dt}\Big|_{R_1} = \dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$

car $\vec{e_\rho}$ n'est pas fixe dans R_1

$\dfrac{d\vec{e_\rho}}{dt}\Big|_{R_1} = \dfrac{d\vec{e_\rho}}{dt}\Big|_{R_2} + \underbrace{\vec{\Omega}(R_2/R_1)}_{\dot{\varphi}\vec{K}} \wedge \vec{e_\rho}$

$= 0 + \dot{\varphi}\vec{K}\wedge\vec{e_\rho} =$

$= \dot{\varphi}\vec{e_\rho}$

2- $\vec{V_e} = \dfrac{d\vec{OO_1}}{dt}\Big|_{R_0} + \vec{\Omega}(R_1/R_0) \wedge \vec{O_1M}$

$\vec{V_e} = a\vec{K} + \dot{\theta}\vec{K} \wedge \rho\vec{e_\rho}$

$\vec{V_e} = a\vec{K} + \dot{\theta}\rho\vec{e_\varphi}$

A. SHIMI

3 -
$\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e} = \dot{\rho}\vec{e_\rho} + (\rho\dot{\varphi} + \dot{\theta}\rho)\vec{e_\varphi} + a\vec{K}$

4-

$$\vec{\gamma}_r = \vec{\gamma}(M/R_1) = \frac{d\vec{V}_r}{dt}\Big|_{R_1} = \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{\rho}\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - \rho\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho$$

$$= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

5-

$$\vec{\gamma}_e = \vec{\gamma}(O_1/R_0) + \dot{\vec{\Omega}}(R_1/R_0)\wedge\vec{O_1M} + \vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge(\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{O_1M})$$

$$= \vec{0} + \vec{0} + \dot{\theta}\vec{K}(\dot{\theta}\vec{K}\wedge\rho\vec{e}_\rho) = -\dot{\theta}^2\rho\,\vec{e}_\rho$$

$$\frac{d\vec{V}(O_1/R_0)}{dt}\Big|_{R_0} = \frac{d\,a\vec{K}}{dt}\Big|_{R_0} = \vec{0}$$

$$\dot{\vec{\Omega}}(R_1/R_0) = \ddot{\theta}\vec{K} = \vec{0}$$

6-

$$\vec{\gamma}_c = 2\vec{\Omega}(R_1/R_0)\wedge\vec{V}_r = 2\dot{\theta}\vec{K}\wedge(\dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi)$$

$$= 2\dot{\theta}\dot{\rho}\,\vec{e}_\varphi - 2\dot{\theta}\rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\rho$$

7-

A.SVIML

$$\vec{\gamma}_a = \vec{\gamma}_c + \vec{\gamma}_e + \vec{\gamma}_r$$

$$\ddot{\varphi} = 0$$

$$\vec{\gamma}_a = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 - \dot{\theta}^2\rho - 2\dot{\theta}\rho\dot{\varphi})\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}^{\,0} + 2\dot{\theta}\dot{\rho})\vec{e}_\varphi$$

II Etude de la cinématique de M par calcul direct :

1-

$$\vec{V}_a = \frac{d\vec{OM}}{dt}\Big|_{R_0} = \frac{d\vec{OO_1}}{dt}\Big|_{R_0} + \frac{d\vec{O_1M}}{dt}\Big|_{R_0} = a\vec{K} + \frac{d\vec{O_1M}}{dt}\Big|_{R_2} + \vec{\Omega}(R_2/R_0)\wedge\vec{O_1M}$$

$$\frac{d\vec{U}}{dt}\Big|_{R} = \frac{d\vec{U}}{dt}\Big|_{R^*} + \vec{\Omega}(R^*/R)\wedge\vec{U}$$

{ Changement repère

$$= a\vec{K} + \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + (\dot{\theta} + \dot{\varphi})\vec{K}\wedge\rho\,\vec{e}_\rho$$

$$V_a = a\vec{K} + \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

2

$$\vec{\gamma}_a = \frac{d\vec{V}_a}{dt}\Big|_{R_0} = \vec{0} + \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\Big|_{R_0} + \dot{\rho}(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \rho(\ddot{\theta} + \ddot{\varphi})^{0}\vec{e}_\varphi + \rho(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$$

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\theta} = 0$$

$$\vec{\Omega}(R_2/R_0) = \vec{\Omega}(R_2/R_1) + \vec{\Omega}(R_1/R_0)$$

$$\vec{\Omega}(R_2/R_0) = (\dot{\theta} + \dot{\varphi})\vec{K}$$

$\vec{e}_\rho$, $\vec{e}_\varphi$ fixe dans R_2

$$= \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\Big(\cancel{\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}\Big|_{R_2}}^{\,0} + \underbrace{\vec{\Omega}(R_2/R_0)}_{(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\vec{K}}\wedge\vec{e}_\rho\Big) + (\dot{\rho}\dot{\theta} + \dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \rho(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\Big(\underbrace{\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}\Big|_{R_2}}_{0} + \vec{\Omega}(R_2/R_0)\wedge\vec{e}_\varphi\Big)$$

$$= \ddot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \dot{\rho}(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \rho(\dot{\theta} + \dot{\varphi})(\dot{\theta} + \dot{\varphi})(-\vec{e}_\rho)$$

$$\gamma_a = (\ddot{\rho} - \rho(\dot{\theta} + \dot{\varphi})^2)\vec{e}_\rho + \dot{\rho}(\dot{\theta} + \dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

on trouve même Resultat de Q 3 et 7